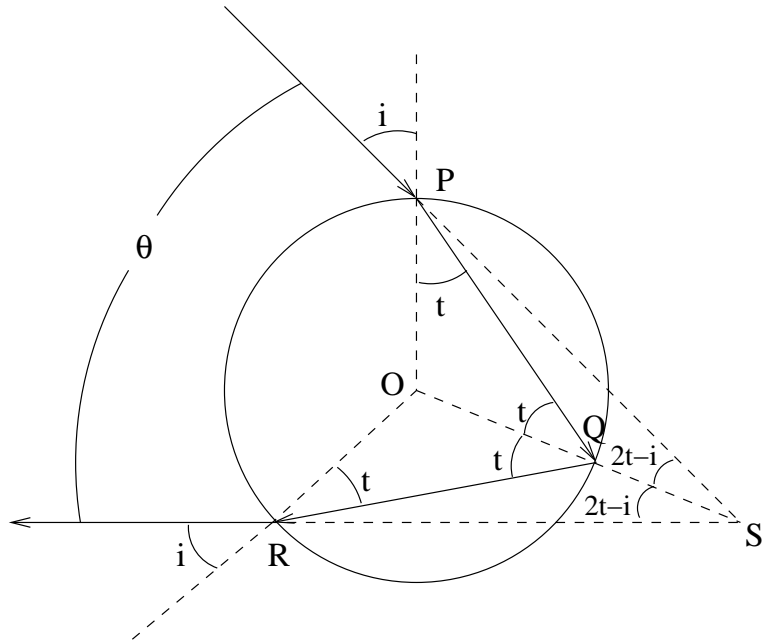


彩虹

你可曾想過雨後的彩虹是怎麼來的嗎？彩虹是由於陽光在水珠中的折射和反射所成的，假設

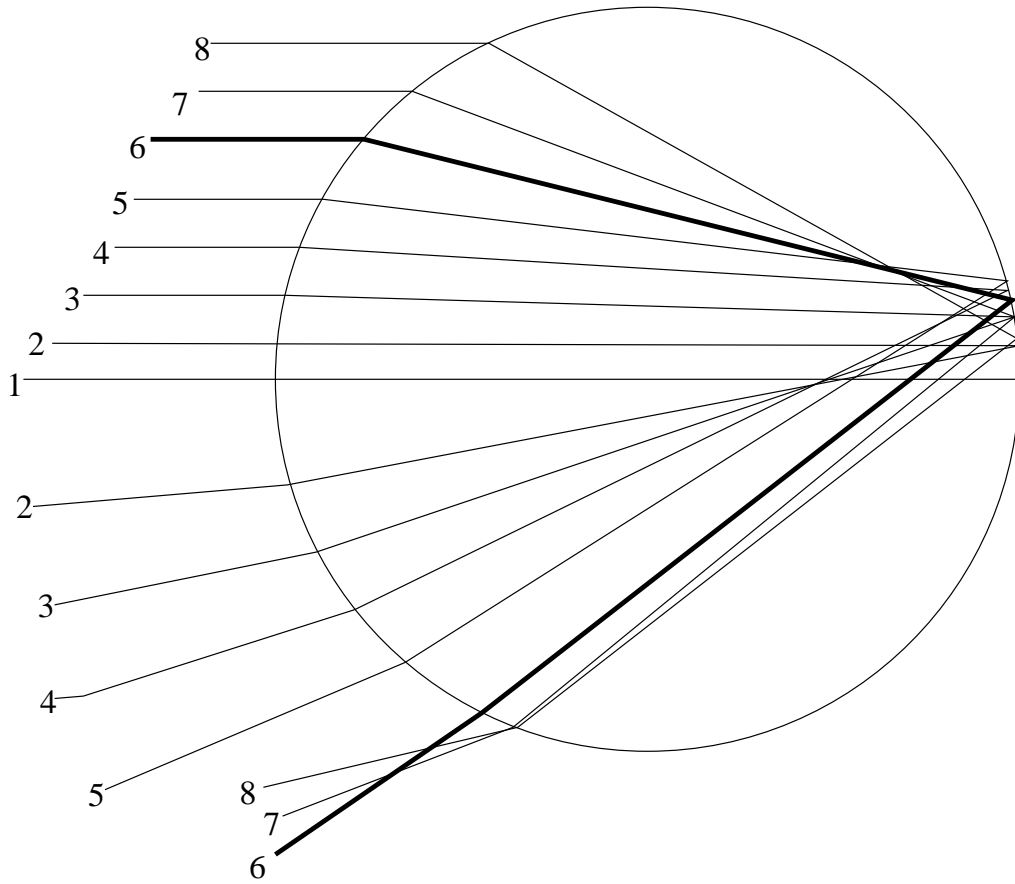
1. 水珠是球形的
2. 光速極快，光線在水珠內的時間可以不計
3. 太陽光互相平行

先看一條光線在水珠中的折射和反射現象



i :入射角, t :折射角, $\theta = 2(2t - i)$ 是入射光經折射, 反射, 再折射離開水珠與原入射角方向的夾角

再看一束平行光打到一個水珠所發生的現象



粗線表示 $\theta = \theta_{max}$ 的光線

由圖顯示在 θ 值最大的附近，光線有集中的趨勢(第6條的同一邊) 所以需要了解何時 $\frac{d\theta}{di} = 0$

假設 n 是水的折射率

$$\text{則 } \sin i = n \sin t \Rightarrow \cos i = n \cos t \cdot \frac{dt}{di}$$

$$\text{令 } \frac{d\theta}{di} = 4\left(\frac{dt}{di}\right) - 2 = 0$$

$$\therefore \frac{dt}{di} = \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos t}, \therefore \cos^2 t = \frac{4 \cos^2 i}{n^2} \dots (1)$$

$$\text{又 } \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \frac{\sin^2 i}{n^2} \dots (2),$$

將(2)代入(1)

$$1 - \frac{\sin^2 i}{n^2} = \frac{4 \cos^2 i}{n^2}$$

$$n^2 - \sin^2 i = 4 \cos^2 i = 4 - 4 \sin^2 i$$

$$\therefore n^2 = 4 - 3 \sin^2 i = 1 + 3 \cos^2 i$$

所以當我們知道折射率 n 時就可解出 $\theta = 2(2t - i)$

在此一仰角 θ , 我們可以看到彩虹.

紅光折射率 = 1.332

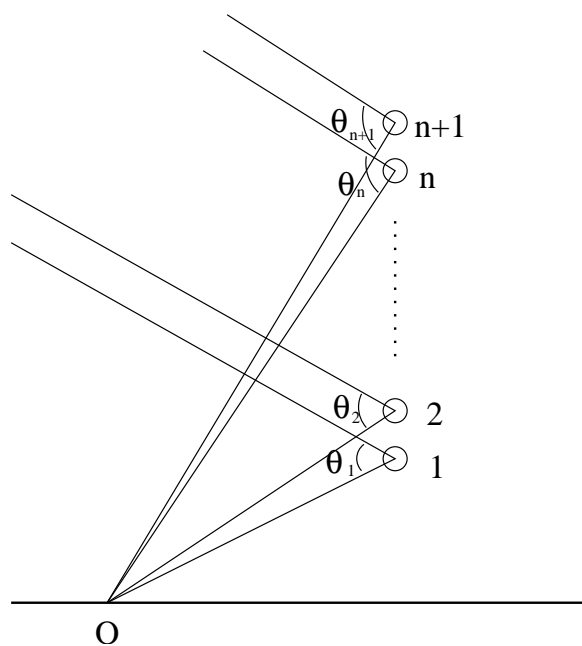
$$\therefore \cos i_r = 0.5080 \Rightarrow i_r = 59^\circ 28'$$

$$\therefore \sin t_r = 0.6467, t_r = 40^\circ 17'$$

$$\theta_{max(r)} = 42^\circ 13'$$

$$\text{紫光折射率} = 1.344, \therefore \theta_{max(p)} = 40^\circ 30'$$

在下雨過後, 有一串水珠排排站在觀察者O的前面, 依序是1, 2, 3, \dots , n , $n+1$, \dots



θ_n 會隨著 n 增加而增加, 當 $\theta_n = \theta_{max(r)}$ 時, 則眼睛裡會出現明顯的紅光, 當觀察者身體原地轉動時, 會在仰角 $42^\circ 13'$ 附近發現一條耀眼的紅色圓弧, 其他顏色會在不同的仰角產生, 這就是我們看到的彩虹.

本文參考數學傳播十三卷二期民78年6月

註: 請參考大英百科rainbow條目及所附插圖