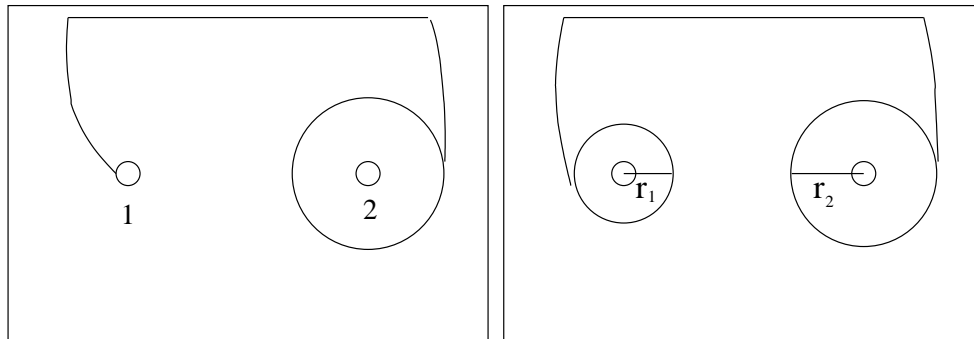


錄音帶



如果你曾注意過收音機帶動錄音帶的情形時，就會發現到，在收聽(或者快轉)的時候，在1處的輪子會逆時針旋轉，以帶動磁帶，而磁帶原本在2的地方就會被一直帶動，最後會繞到輪子1上。

現在我們想要考慮兩個問題：

1. 記 $r_1(t)$ 為1號輪子在 t 時刻所繞出的磁帶的半徑， $r_2(t)$ 為2號輪子在 t 時刻磁帶形成圓形的半徑，它們會隨 t 而變化，那麼兩半徑的變化率之比(即 $\frac{dr_1}{dr_2}$)為何？
2. 如果我知道錄音帶從一開始(輪1沒有磁帶，所有磁帶都在輪2上)轉到一半(輪1的磁帶量=輪2的磁帶量)時，需要一分鐘，並且輪1的轉速始終保持一定值，那麼錄音帶全部轉完的時候需要幾分鐘？

第一個問題其實並不難，如果注意到磁帶的總量始終保持一定，另一個角度想就是兩磁帶所繞出的兩個圓形面積總和是固定的，於是會有 $\pi r_1^2(t) + \pi r_2^2(t) = \text{常數}$ ，對 t 微分後得到

$$2\pi r_1(t) \frac{dr_1}{dt} + 2\pi r_2(t) \frac{dr_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dr_1}{dr_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

第二個問題我們可以試著用積分的方法解決，首先注意到由於轉速是一定(記為 ω)，所以半徑 r_1 是和 t 成正比，於是不妨令 $r_1 = kt$ (比方說輪子每秒轉10圈，那麼一秒後半徑就多了10個磁帶的厚度，兩秒後半徑就多了20個磁帶的厚度)，另外，我們同樣是以圓面積代表磁帶量，所以 $\int_0^1 2\pi r_1(t) h \omega dt = \int_0^1 2\pi k t h \omega dt = \frac{1}{2}$ (一分鐘時轉了總長的一半， h 是一比例常數) 欲解 $\int_0^x 2\pi r_1(t) h \omega dt = \int_0^1 2\pi k t h \omega dt = 1$ 時的 x 值。 $\because 2\pi k h \omega \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \pi k h \omega = \frac{1}{2} 2\pi k h \omega \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^x = \pi k h \omega x^2 = \frac{1}{2} x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ 所以帶子全部轉完需要 $\sqrt{2}$ 分鐘