

總統副總統喝咖啡問題

總統與副總統一同坐下來喝咖啡. 他們面前各有一杯相同溫度的咖啡. 總統先勺了一匙奶精加到咖啡內攪拌均勻. 過了十分鐘後, 副總統也加入相同份量的奶精. (注意: 奶精一直保持相同的溫度)並且攪拌均勻. 隨後兩人同時喝咖啡. 假設奶精的溫度比室溫低, 室溫又比咖啡低, 那麼誰喝到較熱的咖啡?

這個問題需要利用牛頓冷卻定律(Newton's Laws of Cooling):

”物體和周遭(例如室溫)兩溫度差的變化率和兩者的溫度差成正比”

寫成數學式, 即:

$$\frac{dD}{dt} = -\alpha D$$

其中 $D(t)$ 表在 t 時刻兩者溫度差, α 是比例常數, 而負號表示溫度差是呈遞減關係(隨 t) 於是解一階微分方程: $\Rightarrow D(t) = ce^{-\alpha t}$

若給予初始值 D_0 :一開始兩溫差.

$$\Rightarrow D(t) = D_0 e^{-\alpha t}, t \geq 0$$

我們所關心的是實際溫度, 記 $T(t)$ 為物體在 t 時刻的溫度, T_s 為周遭溫度(假設為常數)

$$\therefore D(t) = T(t) - T_s, D_0 = T_0 - T_s$$

$$\Rightarrow T(t) - T_s = (T_0 - T_s)e^{-\alpha t}, \Rightarrow T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-\alpha t}$$

現在回到原問題: 設咖啡的初始溫度是 T_{coff} , 比熱是 z_1 , 質量 M 一匙奶精的溫度是 T_c , 比熱是 z_2 , 質量 m

總統(A): 先混合咖啡與奶精, 設均衡溫度為 X , 則由

$$M \cdot z_1 \cdot (T_{coff} - X) = m \cdot z_2 \cdot (X - T_c) \Rightarrow X = \frac{M z_1 T_{coff} + m z_2 T_c}{M z_1 + m z_2}$$

冷卻十分鐘後有 $T_A(10) = T_s + (X - T_s)^{-10\alpha}$

副總統(B): 咖啡先冷卻十分鐘 $y(10) = T_s + (T_{coff} - T_s)e^{-10\beta}$, 之後咖啡再和奶精混合, 設均衡溫度為 $T_B(10)$, 則有

$$M z_1 (y(10) - T_B(10)) = m z_2 (T_B(10) - T_c) \Rightarrow T_B(10) = \frac{M z_1 y(10) + m z_2 T_c}{M z_1 + m z_2}$$

比較 $T_A(10)$ 和 $T_B(10) \Leftrightarrow$ 比較 T_{coff} 和 $y(10)$

\Leftrightarrow 比較 T_{coff} 和 $T_s + (T_{coff} - T_s)e^{-10\beta}$ 發現 $T_{coff} > T_s + (T_{coff} - T_s)e^{-10\beta}$.

結論: 總統喝到比較熱的咖啡.

註：就極端情形來看，如果一開始的時候，總統在咖啡中加入相當分量的奶精，使咖啡的溫度降到剛好是室溫，那麼此後總統的咖啡就處於等室溫的狀態，如此過十分鐘，副總統的咖啡會比原來開始的要冷，再加入等量的奶精一定會低於室溫。