

雪球融化

假設雪球融化的速率與表面積成正比，若有一個半徑為10公分的雪球，在氣溫氣壓皆固定的情況之下，在5分鐘後融化為一個半徑5公分的雪球，請問雪球完全融化需要多少時間？

解：假設此雪球在時間 t 分鐘時的半徑為 $r(t)$ 公分，由題意可知 $r(0) = 10$ ， $r(5) = 5$ ，又雪球融化的速率與表面積成正比，雪球融化的速率即雪球體積的變化率，雪球的體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3(t)$ ，表面積為 $4\pi r^2(t)$ ，所以有

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3(t)\right)' = k4\pi r^2(t)$$

， k 為一比例常數。由於體積隨時間經過而減少，可知 $k < 0$ ， $\Rightarrow 4\pi r^2(t) \cdot r'(t) = k \cdot 4\pi \cdot r^2(t) \Rightarrow r'(t) = k \Rightarrow r(t) = k \cdot t + c$ ， c 為常數，由 $r(0) = 10$ ， $r(5) = 5$ ，可解出 $r(t) = -t + 10$ ，由此可看出雪球的半徑隨時間經過等速率減少，雪球完全融化時 $r(t) = 0$ ， $t = 10$ ，所以雪球在10分鐘後完全融化。