2020 台大數學系台大傅鐘獎學金面談試題

時間 2020 年 8 月 11 日,
筆試: 9:30 - 12:00,
口試: 13:00 - 15:00.

1. 令 $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ 為單位圓內接正 17 邊形之頂點. 試證 (1) $\displaystyle\sum_{j=2}^{17} \overline{A_1A_j}^{10}$ 為有理數, (2) $\displaystyle\sum_{j=2}^{17} \overline{A_1A_j}^{5}$ 為無理數.

2. 令 P 是平面上一組有限個數的點集合, L 是平面上一組有限個數的線集合. 我們用 $|P|$ 來代表集合的個數. 考慮下列的集合 $S = \{(p, \ell) \in P \times L; p \in \ell\}$. 此集合有一個簡單的上界, 也就是 $|S| \leq |P||L|$. 問題: 給一個更小的上界.

3. 給定非負整數 $m, n \geq 0$, 令 S_n^m 為將 m 個元素所構成的集合區分成 n 個互不相交的非空子集合的所有方法總數, 或稱為第二類的 Stirling 數, 我們約定 $S_0^0 = 0$. (a) 請問 S_n^m 滿足何種形式的遞迴式 (巴斯卡三角形)? (b) 證明: $n!S_n^m = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_j^n j^m$. (c) 考慮數列 $a_n, n \geq -1$. 其中 $a_{-1} = -1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_j^n (j-1)^{n-j} a_{j-1} = -3\delta_{n,3}$. 求 a_n 的一般式.

4. 對任一個大於 2 的正整數 n, 假定在 $\mathbb{R}^n$ 中有 m 個向量 $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^m$ 滿足 (1) 皆為單位長: $|\mathbf{v}_j| = 1, j = 1, \ldots, m$, (2) 接近於互相垂直: 精確來說, 對所有 $j \neq k$, 其兩兩內積均有 $|\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_k| < \dfrac{1}{n}$. 試給出 m 的一個上界估計.

5. 克卜勒行星運動定律是科學史上的重大發現. 牛頓提出了萬有引力定律, 並發明了微積分, 最終結合兩者證明了克卜勒的定律. 請嘗試給出這個證明的細節, 特別是關於行星軌道是一個圓錐曲線的證明.

注意事項: (1) 時間有限, 請選擇有把握的題目做, 不需每題都做. (2) 答題的完整度重於零散的分數加總. (3) 進入口試的門檻: 至少有兩題作答接近完整.