附錄一

歐氏空間中的曲線和曲面[①]

陳省身

引言

這篇文章論述了整體微分幾何中一些最基本的定理，它們有希望在將來有進一步的發展。我們將考慮最簡單的情況，在這些情況中，幾何意義是最清楚的。

1. 切線回轉定理

設E是定向的歐氏平面，故旋轉的方向有確切的意義，一條光滑曲線可以表示爲它的定位向量 $X=(x_1, x_2)$ 作爲它的弧長 s 的函數，我們假設函數$X(s)$——即$x_1(s)$和 $x_2(s)$——是兩次連續可微的，且向量 $X'(s)$ 恒不爲零。後一假設保證曲線上每一點有單位切向量$e_1(s)$，它是沿$X'(s)$方向的單位向量。並且，因E是定向的，將 $e_1(s)$ 正旋 $\pi/2$ 就得到單位法向量$e_2(s)$。Frenet公式給出$X(s)$, $e_1(s)$, $e_2(s)$ 之間的聯繫:

$$\frac{dX}{ds}=e_1,\quad \frac{de_1}{ds}=\kappa e_2,\quad \frac{de_2}{ds}=-\kappa e_1。\qquad (1)$$

函數$\kappa(s)$稱爲**曲率**，$\kappa(s)$可正可負，若改變曲線或平面的方向時，則改變符號。

曲線C稱爲**閉的**，如果$X(s)$是周期L的周期函數，其中L是曲數C的長度。曲線稱爲**簡單的**，如果當$0<s_1-s_2<L$時，必有

$$X(s_1)\neq X(s_2)。$$

① 原文刊登在 *Studes in Global Geometry and Analysis* (edited by S.S. Chern), Mathematical Association of America (1967), 16-56。本附錄由田疇譯出。

曲線稱爲凸的，如果曲線在它的每一條切線的一旁。

設 C 是長爲 L 的定向閉曲線，其定位向量表示爲它的弧長的函數 $X(s)$。O 是平面上固定的一點，取作爲座標系的原點，Γ 表示以 O 爲中心的單位圓。我們把切映射

$$T: C\to\Gamma$$

定義爲：將曲線 C 上的一點 P 映到以 O 爲起點的、平行於曲線在 P 點的切向的單位向量的終點。顯然，T 是連續映射。在直觀上很清楚，當一點繞 C 一周時，它的像繞 Γ 可能好幾圈。這個圈數稱爲 C 的回轉指數。切線回轉定理斷言，若 C 是簡單的，則它的旋轉指數是 ± 1。現在我們給旋轉指數以嚴格的定義。

選定以 O 爲起點的一個向量 OX，並用 $\tau(s)$ 表示 OX 到向量 $e_1(s)$ 的角，且假設

$$0\leq\tau(s)<2\pi,$$

於是 $\tau(s)$ 唯一確定。然而，$\tau(s)$ 是不連續的，因爲在使 $\tau(s_0)=0$ 的 s_0 的每一個鄰域裏可以有 $\tau(s)$ 的一些值與 2π 相差一個任意小的量。但是，如下列引理所示的與 $\tau(s)$ 密切關聯的一個連續函數 $\tilde{\tau}(s)$ 總是存在的。

引理：

存在一個連續函數 $\tilde{\tau}(s)$，使

$$\tilde{\tau}(s)\equiv\tau(s)\pmod{2\pi}。$$

〔證明〕

爲證明這一引理，首先考察映射 T，它是連續的，也是一致連續的。所以，必有數 $\delta>0$，使得當 $|s_1-s_2|<\delta$ 時，$T(s_1)$ 和 $T(s_2)$ 在同一開半平面內，由對 $\tilde{\tau}(s)$ 所要求的條件，若 $\tilde{\tau}(s_1)$ 已知，則 $\tilde{\tau}(s_2)$ 完全決定。我們用點

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_m=L$$

分區間 $0\leq s\leq L$，並使

$$|s_i-s_{i-1}|<\delta,\quad i=1,\cdots,m。$$

爲規定 $\tilde{\tau}(s)$，命 $\tilde{\tau}(s_0)=\tau(s_0)$，則 $\tilde{\tau}(s)$ 在子區間 $s_0\leq s\leq s_1$ 上完全確定，

特別在 s_1 的值確定，它又決定了 $\tilde{\tau}(s)$ 在第二個子區間上的值，等等。顯然，如此決定的函數 $\tilde{\tau}(s)$ 滿足引理的條件。

〔證完〕

差 $\tilde{\tau}(L)-\tilde{\tau}(0)$ 是 2π 的整數倍，設爲 $\gamma\cdot2\pi$。現在證明，整數 γ 不依賴於函數 $\tilde{\tau}(s)$ 的選擇。事實上，設 $\tilde{\tau}'(s)$ 是滿足相同條件的函數，則有

$$\tilde{\tau}'(s)-\tilde{\tau}(s)=n(s)\cdot2\pi$$

其中 $n(s)$ 是整數。因爲 $n(s)$ 是連續的，它必爲常數，從而得到

$$\tilde{\tau}'(L)-\tilde{\tau}'(0)=\tilde{\tau}(L)-\tilde{\tau}(0)。$$

這就證明了 γ 不依賴於 $\tilde{\tau}(s)$ 的選擇，我們將 γ 定義爲曲線 C 的回轉指數。

定理：

簡單閉曲線的回轉指數爲 ± 1。

〔證明〕

爲證明這個定理，我們考慮映射 Σ，它把 C 的有序點對 $X(s_1), X(s_2)$（$0\leq s_1\leq s_2\leq L$）映到以 O 爲起點而平行於由 $X(s_1)$ 到 $X(s_2)$ 的割線的單位向量的終點。這些有序點對能够被表示爲在 (s_1, s_2) 平面中由 $0\leq s_1\leq s_2\leq L$ 所決定的一個三角形 $\triangle$。$\triangle$ 到 Γ 的映射 Σ 是連續的。我們也注意到，它限制在邊 $s_1=s_2$ 上就是切映射 T。

對任意一點 $p\in\triangle$，命 $\tau(p)$ 表示 OX 到 $O\Sigma(p)$ 的角，且使 $0\leq\tau(p)<2\pi$。這個函數也未必連續。然而，我們將證明，存在連續函數 $\tilde{\tau}(p)$，$p\in\triangle$，使

$$\tilde{\tau}(p)\equiv\tau(p)\pmod{2\pi}。$$

事實上，設 m 是 $\triangle$ 的內點，我們用經過 m 的半徑覆蓋 $\triangle$。由在前面的引理的證明中所用的辦法，我們能够確定一個函數 $\tilde{\tau}(p)$，$p\in\triangle$，使 $\tilde{\tau}(p)\equiv\tau(p)\pmod{2\pi}$，且使它沿每一個過 m 的半徑都是連續的。剩下來要證明的是它在 $\triangle$ 中是連續的。爲此，設 p_0 是 $\triangle$ 的一點，因爲 Σ 是連續的，由線段 mp_0 的緊緻性得到，必存在一個數 $\eta=\eta(p_0)>0$，使得，對 $q_0\in mp_0$，以及對使距離 $d(q, q_0)<\eta$ 的任一點 $q\in\triangle$，點 $\Sigma(q)$ 和 $\Sigma(q_0)$ 不是對徑點，這後一條件等價於關係：

$$\tilde{\tau}(q)-\tilde{\tau}(q_0)\not\equiv 0\pmod{\pi}。\qquad(2)$$

現給定 ε，$0<\varepsilon<\pi/2$，我們選取p_0的一個鄰域U，使U被包含在p_0的η鄰域內，並使得，對 $p\in U$，$O\Sigma(p_0)$和$O\Sigma(p)$之間的夾角小於 ε。這是可能的，因爲映射Σ是連續的，最後的條件能表示爲

$$\bar\tau(p)-\bar\tau(p_0)=\varepsilon'+2\kappa(p)\pi,\quad |\varepsilon'|<\varepsilon, \tag{3}$$

其中$\kappa(p)$是整數。設q_0是線段 mp_0 上的任意一點，作平行於 p_0p 的線段 q_0q，且使 q 在mp上。沿 mp，$\bar\tau(q)-\bar\tau(q_0)$ 是 q 的連續函數，且當 q 與 m 一致時函數值爲零，因$d(q,q_0)$小於 η，由方程(2)得到

$$|\bar\tau(q)-\bar\tau(q_0)|<\pi。$$

特別，對$q_0=p_0$，

$$|\bar\tau(p)-\bar\tau(p_0)|<\pi。$$

將這一結果與方程式(3)聯繫起來，我們得到

$$\kappa(p)=0,$$

這就證明了 $\bar\tau(p)$ 在△中是連續的。因 $\bar\tau(p)\equiv\tau(p)(\mathrm{mod}2\pi)$，容易看出$\bar\tau(p)$是可微分的。

現在設$A(0,0)$，$B(0,L)$和$D(L,L)$是△的頂點，C的旋轉指數由下列線積分所決定:

$$2\pi\gamma=\int_{AD}d\bar\tau。$$

因爲$\bar\tau(p)$在△內有定義，所以

$$\int_{AD}d\bar\tau=\int_{AB}d\bar\tau+\int_{BD}d\bar\tau。$$

爲計算右端的線積分的值，我們選取適當的座標系。不妨假設 $X(0)$ 是C的"最低點"，即縱座標爲極小值的點，且選 $X(0)$ 作爲座標原點。於是C在O的切向量是水平的，並把它規定爲OX 的方向。這樣，曲線 C 就處於以OX軸爲界的上半平面內，且線積分

$$\int_{AB}d\bar\tau$$

就等於當P沿C運行一周時OP旋轉的角度。因爲OP永不指向下方，故這個角度爲$\varepsilon\pi$，$\varepsilon=\pm1$。類似地，線積分

$$\int_{BD}d\bar\tau$$

就等於當P沿C繞行一周時，OP旋轉的角度，其值也是$\varepsilon\pi$。因此，這兩個積分的和爲$2\varepsilon\pi$，所以曲線C的回轉指數爲±1，這就完成了定理的證明。

〔證完〕

我們還能够用一個積分公式來定義回轉指數。事實上，利用在引理中的函數$\bar\tau(s)$，我們可把函數的單位切向量和單位法向量的分量表示如下:

$$e_1=(\cos\bar\tau(s),\ \sin\bar\tau(s)),$$
$$e_2=(-\sin\bar\tau(s),\ \cos\bar\tau(s))。$$

這就得到

$$d\bar\tau(s)=de_1\cdot e_2=\kappa ds,$$

從這個方程式，我們導出以下關於回轉指數的積分公式:

$$2\pi\gamma=\int_C\kappa\, ds。\tag{4}$$

這一公式對閉曲線成立，並不要求曲線是簡單的。

圖14給出一個例子，它是回轉指數爲零的一條閉曲線。

在微分幾何中有許多有趣的定理對較一般的一類曲線，即所謂分段光滑的曲線也成立。這樣的曲線是由有限段光滑弧

$$A_0A_1,\ A_1A_2,\ \cdots,\ A_{m-1}A_m$$

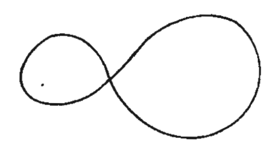

圖 14

所構成的，而通過公共頂點 A_i，$i=1,\cdots,m-1$ 的兩段弧的切線可以是不同的。曲線稱爲閉的，如果 $A_0=A_m$。分段光滑閉曲線的一個最簡單的例子就是直線多邊形。

回轉指數的概念和切線回轉定理都能推廣到分段光滑閉曲線。現不加證明將結果簡述如下。設$s_i(i=1,\cdots,m)$是從A_0到A_i的弧長，故$s_m=L$就是曲線的長。並設曲線已被定向，則切映射在除 A_i 以外的所有點都有定義。在頂點A_i有兩個單位向量分別切於$A_{i-1}A_i$ 和 A_iA_{i+1}，(規定$A_{m+1}=A_1$)。它們在Γ上的對應點分別用$T^-(A_i)$和$T^+(A_i)$表示 設φ_i是從$T^-(A_i)$到$T^+(A_i)$的角，且$-\pi<\varphi_i<\pi$。簡言之，φ_i是從$A_{i-1}A_i$ 的切線到A_iA_{i+}

的切線的外角。對每一段弧$A_{i-1}A_i$，都能定義一個連續函數$\tau_i(s)$，它是由OX到在$X(s)$的切向量的角。由方程式

$$2\pi\gamma=\sum_{i=1}^{m}\left\{\tau_i(s_i)-\tau_i(s_{i-1})\right\}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i \qquad (5)$$

決定的數γ是一個整數，稱爲曲線的回轉指數。這時關於切線回轉定理也成立。

定理:

若一分段光滑的曲線是簡單的，則它的回轉指數等於± 1。

作爲切線回轉定理的一個應用，我們給出下面關於簡單閉凸曲線的特徵。

附注

一條簡單閉曲線是凸的，必須且只須它可以取適當的定向使它的曲率≥ 0。

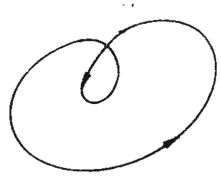

圖 15

首先指出，若曲線不是簡單的，則定理不成立。事實上，圖15給出一條非凸的曲線，其曲率$\kappa>0$。

〔證明〕

爲證明這一定理，我們構作函數$\tau(s)$，故$\kappa=d\tau/ds$。條件$\kappa\geq 0$就等價於說$\tau(s)$是單調不減的函數。因爲C是簡單的，我們能够假設$\tau(s)(0\leq s\leq L)$由0增加到2π。因此，若在$X(s_1)$和$X(s_2)$ $(0\leq s_1<s_2<L)$的切線有相同的指向，則C從$X(s_1)$到$X(s_2)$的弧是一直線段，它們在各點的切線一致。

假定$\tau(s)(0\leq s\leq L)$是單調不減的，而C是非凸的，則在C上有一點$A=X(s_0)$，使得C在A的切線t的兩旁都有C的點。選定t的正側，並考慮從C上的任一點$X(s)$到t的有向垂直距離。這是一個s的連續函數，並假定它在曲線C上的點M和N分別達到極大和極小值。顯然，M和N都不在t上，但C在M和N的切線都平行於t。因此，這兩條切線和t這三者之中必有兩條有相同的指向，由前一段的討論，這是不可能的。

其次，假設C是凸的。爲證明$\tau(s)$是單調的，我們假設

$$\tau(s)_1=\tau(s_2),\quad s_1<s_2,$$

則曲線在$X(s_1)$和$X(s_2)$的切線有相同的指向。但是，又有一切線與它們平行而指向相反。由C的凸性，前面這兩條切線必重合。

因此，我們考慮與C相切於兩個不同的點A和B的直線t。現說明線段AB必爲C的一部分。事實上，若非如此，設D是AB上的一點但不在C上，過D作垂直於t的但在包含C的半平面內的直線u。則u與c相交至少兩點。在這些交點之中，設F是離t最遠的，而G是離t最近的，故$F\neq G$。則G是三角形ABF的一個內點。C在G的切線的兩邊都有C的點，這與C的凸性矛盾。

由此可見，在上一段的假設下，線段AB是C的一部分，且在A和B的切線方向相同，這就證明了連接$X(s_1)$和$X(s_2)$的線段屬於C。後者就蘊涵了$\tau(s)$在區間$s_1\leq s\leq s_2$中保持常數。因此，函數$\tau(s)$是單調的。

〔證完〕

定理的前一半也可以說明如下:

附注

一條閉曲線若$\kappa(s)\geq 0$，且其旋轉指數爲1，則必是凸的。

切線回轉定理實質上是由Riemann發現的。以上的證明是由H. Hopf給出的。(見*Compositio Mathematica*, 2 (1935), 50-62)。爲進一步的閱讀，可以參看:

1. H. Whitney, "On regular closed curves in the plane", *Compositio Mathematica*, 4 (1937), 276-284。

2. S. Smale, "Regular curves on a Riemannian manifold", *Transactions of the American Mathematical Society*, 87 (1958), 492-511。

3. S. Smale, "A classification of immersions of the two-sphere", *Transactions of the American Mathematical Society*, 90 (1959), 281-290。

2. 四頂點定理

關於平面曲線的一個有趣的定理是所謂的"四頂點定理"。定向平面

曲線的頂點指的是使曲率有相對極值的點。因爲構成曲線的點集是緊緻的，故一條平面閉曲線至少有兩個頂點，各對應於曲率的最小值和最大值。下面的定理說至少有四個頂點。

定理:

一條簡單的閉凸曲線至少有四個頂點。

這個定理由 Mukhopadhyaya 在1909年首先發現；下面給出的證明是 G. Herglotz 的工作。定理的結論對非凸曲線也對，但是證明比較困難。這個定理的結論不能進一步改進，因爲一個具有不等軸的橢圓恰有四個頂點，就是它與對稱軸的交點。

〔證明〕

假設曲線C僅有兩個頂點M和N，我們將證明由此引出矛盾。直線MN不會與C相交於其它點；倘若相交於Q點，則在M, N, Q這三點的中間一點所作曲線的切線必包含另外兩點在內。由上一節的證明，線段MN必爲曲線C的一部分，這就得到在M和N的曲率都是零，這與M和N分別使曲線的曲率取最小值和最大值矛盾。

我們用0和s_0分別表示M和N的參數，並取MN爲x_1軸。則能假設

$$x_2(s)<0,\quad 0<s<s_0,$$
$$x_2(s)>0,\quad s_0<s<L,$$

其中L是曲線C的長。設$(x_1(s), x_2(s))$是曲線C上對應於參數s的點的定位向量，則其單位切向量和單位法向量分別爲

$$e_1=(x_1', x_2'),\quad e_2=(-x_2', x_1'),$$

其中"$'$"表示對s的微商。由Frenet公式

$$x_1''=-\kappa x_2',\quad x_2''=\kappa x_1', \tag{6}$$

這就得到

$$\int_0^L \kappa x_2' ds=-x_1'\Big|_0^L=0\,。$$

左端的積分可以寫成下列和式:

$$\int_0^L \kappa x_2' ds=\int_0^{s_0}\kappa x_2' ds+\int_{s_0}^L \kappa x_2' ds。$$

對和式中的每一部分應用第二中值定理。第二中值定理說：設$f(x), g(x)$ $(a\le x\le b)$是x的兩個函數，且$f(x)$和$g(x)$連續，$g(x)$單調，則必存在ξ，$a<\xi<b$，滿足方程

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx。$$

因爲$\kappa(s)$在區間$0\le s\le s_0$和區間$s_0\le s\le L$中都是單調的，於是得到

$$\int_0^{s_0}\kappa x_2' ds=\kappa(0)\int_0^{\xi_1}x_2' ds+\kappa(s_0)\int_{\xi_1}^{s_0}x_2' ds$$
$$=x_2(\xi_1)(\kappa(0)-\kappa(s_0)),\quad 0<\xi_1<s_0,$$
$$\int_{s_0}^L \kappa x_2' ds=\kappa(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2}x_2' ds+\kappa(L)\int_{\xi_2}^L x_2' ds$$
$$=x_2(\xi_2)(\kappa(s_0)-\kappa(0)),\quad s_0<\xi_2<L。$$

因爲左端的和爲零，所以

$$(x_2(\xi_1)-x_2(\xi_2))(\kappa(0)-\kappa(s_0))=0,$$

但是，

$$x_2(\xi_1)-x_2(\xi_2)<0,\quad \kappa(0)-\kappa(s_0)>0,$$

這就得到矛盾。

這就說明在C上至少還有一個頂點，因爲取相對極值的點是成對出現的，所以至少有四個頂點，於是證明了定理。

〔證完〕

在頂點的$\kappa'=0$。因此，我們也可以說，在一條簡單的閉凸曲線上至少有四個點使得$\kappa'=0$。

四頂點定理對簡單的閉的非凸平面曲線也是對的；可以參看：

1. S. B. Jackson, "Vertices for planecurves," *Bulletin of American Mathematical Society*, 50 (1944), 564-578。

2. L. Vietoris, "Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven", *Archiv der Mathematik*, 3 (1952), 304-306。

爲了進一步的研究，可以看:

1. P. Scherk, "The four-vertex theorem", Proceeding of the First Canadian Mathematical Congress, Montreal (1945), 97-102。

3. 平面曲線的等周不等式

定理:

具有定長的所有閉的簡單平面曲線中，圓所圍的面積最大。換言之，若L是簡單閉曲線C的長度，A是曲線所圍的面積，則

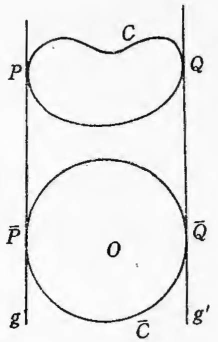

圖 16

$$L^2-4\pi A\geq 0, \tag{7}$$

且等號成立時，必須C爲圓周。

對這個定理已有許多證明，其區别在於優美的程度以及所假設的條件(連續性和凸性)。下面將給出兩個證明，它們分别爲E. Schmidt (1939) 和A. Hurwitz (1902) 的工作。

〔Schmidt〕的證明

將C圍在與C分别相切於P和Q的兩條平直線g和g'之間 (圖16)。設 $s=0$，s_0分别爲點P和Q的參數，並作一與g和g'分别切於$\overline{P}$和$\overline{Q}$的圓$\overline{C}$，設其半徑爲r，並取它的中心爲座標系的原點。命 $X(s)=(x_1(s),\ x_2(s))$ 爲C的定位向量。故

$$(x_1(0),x_2(0))=(x_1(L),x_2(L))。$$

$\overline{C}$的定位向量可以取作$(\bar{x}_1(s),\bar{x}_2(s))$，使得

$$\bar{x}_1(s)=x_1(s), \tag{8}$$

$$\bar{x}_2(s)=\begin{cases}-\sqrt{r^2-x_1^2(s)}, & 0\leq s\leq s_0,\\ +\sqrt{r^2-x_1^2(s)}, & s_0\leq s\leq L。\end{cases}$$

一條長爲L的閉曲線所圍的面積可以表示爲線積分:

$$A=\int_0^L x_1x_2'ds=-\int_0^L x_2x_1'ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L(x_1x_2'-x_2x_1')ds。$$

將這一公式分别應用到C和$\overline{C}$，得到

$$A=\int_0^L x_1x_2'ds,$$

$$\overline{A}=\pi r^2=-\int_0^L\bar{x}_2\bar{x}_1'ds=-\int_0^L\bar{x}_2x_1'ds,$$

$\overline{A}$表示曲線$\overline{C}$所圍的面積，將上面兩式相加得到

$$A+\pi r^2=\int_0^L(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')ds \tag{9}$$

$$\leq\int_0^L\sqrt{(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')^2}ds$$

$$\leq\int_0^L\sqrt{(x_1^2+\bar{x}_2^2)(x_1'^2+x_2'^2)}ds$$

$$=\int_0^L\sqrt{x_1^2+\bar{x}_2^2}\,ds=Lr。$$

因爲兩個正數的幾何平均小於或等於它們的算術平均，所以

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\leq\frac{1}{2}(A+\pi r^2)\leq\frac{1}{2}Lr。$$

兩邊平方並約掉r就得到不等式(7)。

現在假設方程式(7)中等號成立；則A和πr^2的幾何平均與算術平均相等所以$A=\pi r^2$，$L=2\pi r$。因爲直線g和g'的方向是任意的，這就説明C在所有的方向有相同的寬度。此外，在方程式(9)中等號必須處處成立。特别，

$$(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')^2=(x_1^2+\bar{x}_2^2)(x_1'^2+x_2'^2),$$

於是，

$$\frac{x_1}{x_2'}=\frac{-\bar{x}_2}{x_1'}=\pm\frac{\sqrt{x_1^2+\bar{x}_2^2}}{\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}}=\pm r。$$

由方程(9)的第一個等式可以看出其比值爲r，即

$$x_1=rx_2',\quad \bar{x}_2=-rx_1'。$$

當交換x_1和x_2時，上述關係仍然成立，故有

$$x_2=rx_1'。$$

因此，我們得到

$$x_1^2+x_2^2=r^2$$

這就證明了C是一圓。

〔證完〕

Hurwitz的證明利用了Fourier 級數的理論，我們將先證明 Wirtinge

的引理。

引理:

設$f(t)$是周期爲2π的連續的周期函數，且具有連續的導數$f'(t)$。若

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt=0,$$

則

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

此外，等號成立必須且只須

$$f(t)=a\cos t+b\sin t. \tag{11}$$

〔證明〕

爲證明這一引理，我們將$f(t)$展開成Fourier級數:

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

因爲$f'(t)$是連續的，它的Fourier級數可以由上式逐項微分得到:

$$f'(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nt-na_n\sin nt).$$

因爲

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt=\pi a_0,$$

由假設的條件得到$a_0=0$。由Parsevel公式，我們得到

$$\int_0^{2\pi}[f(t)]^2 dt=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2 dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2).$$

因此

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2 dt-\int_0^{2\pi}[f(t)]^2 dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2).$$

這是大於或等於零的。它等於零，必須$a_n=b_n=0$對全體$n>1$成立。所以，$f(t)=a_1\cos t+b_1\sin t$，這就證明了引理。

〔證完〕

〔**Hurwitz**的證明〕

要證明不等式(7)，爲簡單起見，我們假設$L=2\pi$，且

$$\int_0^{2\pi} x_1(s)ds=0.$$

後一假設意味著曲線的重心在x_1軸上，這點可以通過選取適當的座標系得到。曲線的長度和曲線所圍的面積可以分別表示爲積分

$$2\pi=\int_0^{2\pi}(x_1'^2+x_2'^2)ds \text{ 和 } A=\int_0^{2\pi}x_1x_2'ds.$$

從這個方程式得到

$$2(\pi-A)=\int_0^{2\pi}(x_1'^2-x_1^2)ds+\int_0^{2\pi}(x_1-x_2')^2 ds.$$

由引理，第一個積分是≥ 0的，等二個積分顯然是≥ 0的。因此

$$A\leq\pi,$$

這就是等周不等式，等號成立必須

$$x_1=a\cos s+b\sin s,\quad x_2'=x_1.$$

於是得到

$$x_1=a\cos s+b\sin s,$$

$$x_2=a\sin s-b\cos s+c,$$

即C爲一圓周。

〔證完〕

爲進一步閱讀，可以看:

1. E. Schmidt, "Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionezahl", *Math. Zeit.*, 49(1943), 1-109.

4. 空間曲線的全曲率

一條長爲L的空間閉曲線的全曲率定義爲積分

$$\mu=\int_0^L|\kappa(s)|ds, \tag{12}$$

其中$\kappa(s)$是曲線的曲率。對空間曲線，我們僅定義了$|\kappa(s)|$。

假設C是定向的。以空間的原點O爲起點作平行於C的切向量的單位向量。它們的端點描出單位球面上的一條閉曲線Γ，稱爲C的切線像，C上曲率爲零的點的像是Γ上的奇點（卽在這一點沒有切線或有高階密接的切線）。顯然，C的全曲率等於Γ的長。

Fenchel的定理是與全曲率有關的。

定理:

空間閉曲線C的全曲率$\geq 2\pi$。等於2π必須且只須C是一條平面凸曲線。

關於這一定理的下列證明是由 B. Segre (*Bolletino della Unione Mathematica Italiana*, 13 (1934), 279-283)及由 H. Rutishauser 和 H. Samelson (*Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 227 (1948), 755-757) 獨立發現的。也可以看: W. Fenchel, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57 (1951), 44-54。其證明依賴於下面的引理:

引理:

設Γ是單位球面上的可求長的閉曲線，其長$L<2\pi$。則在球面上存在一點m使得Γ上的所有的點x與m的球面距離$\overline{mx}\leq L/4$。若Γ的長爲2π，但不是兩段大半圓弧的聯，則存在一點m，使$\overline{mx}<\pi/2$對Γ上所有的x成立。

我們用記號$\overline{ab}$表示球面上的兩點a和b之間的球面距離。若$\overline{ab}<\pi$則由條件

$$\overline{am}=\overline{bm}=\frac{1}{2}\overline{ab}$$

決定的點m就是它們的中點。設x是滿足條件$\overline{mx}\leq\pi/2$的一個點，則

$$2\overline{mx}\leq\overline{ax}+\overline{bx}。$$

事實上，設x'是x的關於m的對稱點，則

$$\overline{x'a}=\overline{xb},$$

$$\overline{x'x}=\overline{x'm}+\overline{mx}=2\overline{mx}。$$

利用三角形不等式就得到

$$2\overline{mx}=\overline{x'x}\leq\overline{x'a}+\overline{ax}=\overline{ax}+\overline{bx}, \tag{13}$$

這就證明了上述不等式。

現在來證明引理　爲證明引理的第一部分，我們取Γ上的兩點a和b，它們把曲線分成相等的兩段弧。於是$\overline{ab}<\pi$，且用m表示它們的中點。設x是Γ上一點，使$2\overline{mx}<\pi$。這樣的點是存在的，例如點a。於是，

$$\overline{ax}\leq\widehat{ax},\quad \overline{bx}\leq\widehat{bx},$$

其中$\widehat{ax}$和$\widehat{bx}$分別表示沿Γ的弧長。由方程(13)則得到

$$2\overline{mx}\leq\widehat{ax}+\widehat{bx}=\widehat{ab}=\frac{L}{2}。$$

因此，作爲Γ上的函數，

$$f(x)=\overline{mx},\quad x\in\Gamma,$$

它或者$\geq\pi/2$，或者$\leq L/4<\pi/2$。因爲Γ是連通的，而$f(x)$是Γ上的連續函數，故函數$f(x)$的像在區間$(0,\pi)$內是連通的。所以，必有

$$f(x)=\overline{mx}\leq\frac{L}{4}。$$

其次考慮Γ的長是2π的情況。若Γ包含一對對徑點，則其長爲2π必須它是兩個大半圓弧的聯。故Γ必定不包含一對對徑點。假設有一對點a和b，它們平分Γ，且使

$$\overline{ax}+\overline{bx}<\pi$$

對全體$x\in\Gamma$成立，又設m表示$\overline{ab}$的中點。如果

$$f(x)=\overline{mx}\leq\frac{1}{2}\pi,$$

則由方程(13)，

$$2\overline{mx} \leq \overline{ax}+\overline{bx} < \pi。$$

這就意味著$f(x)$不能取值 $\pi/2$。因爲它的像是連通的，以及$f(a)<\pi/2$，因而，

$$f(x)<\pi/2,\ x\in\Gamma。$$

於是就在這一情況下證明了引理。

剩下來要考慮的情況是，Γ不包含任何一對對徑點，但對平分Γ的任一對點a和b，均有一點$x\in\Gamma$，使

$$\overline{ax}+\overline{bx}=\pi$$

成立。讀者利用初等幾何的結果就可以證明這是不可能的。於是，引理證畢。

〔證完〕

〔定理的證明〕

爲證明Fenchel的定理，我們取定一個向量A，且命

$$g(s)=A\cdot X(s),$$

式中右端表示向量A和$X(s)$的數量積。函數$g(s)$在C上是連續的，故必有極大值和極小值。因爲$g'(s)$存在，所以，若在s_0取極值則必有

$$g'(s_0)=A\cdot X'(s_0)=0。$$

這就是說，作爲在球面上的一點A，曲線的切線像上至少有兩點與它的距離爲 $\pi/2$。因爲A是任意的，故切線像與任意的大圓都相交，由引理，它的長$\geq 2\pi$。

下面假設曲線的切線像的長爲 2π。由引理，它必爲兩個大半圓弧的聯。於是，曲線C就是兩段平面弧的聯。因爲C的切線處處存在，它必爲一平面曲線。假設給C以定向使得它的回轉指數

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)ds\geq 0,$$

則有

$$0\leq\int_0^L \{|\kappa|-\kappa\}ds=2\pi-\int_0^L\kappa ds,$$

故其旋轉指數必爲 0 或 1 。對在平面內給定的向量，必有與它平行的C的切向量t，使C在t的左側，則t與這個向量同向，且在它與曲線相切的點有$\kappa\geq 0$。這就意味著

$$\int_{k>0}\kappa ds\geq 2\pi。$$

又因爲$\int_C|\kappa|ds=2\pi$，故沒有使$\kappa<0$的點，且

$$\int_C\kappa ds=2\pi。$$

由第一節的附注，C是凸的。

〔證完〕

作爲推論我們有下列定理。

推論:

若空間閉曲線C的$|\kappa(s)|\leq 1/R$，則C的長

$$L\geq 2\pi R。$$

這是因爲

$$L=\int_0^L ds\geq\int_0^L R|\kappa|ds=R\int_0^L|\kappa|ds\geq 2\pi R。$$

Fenchel 定理對分段光滑的閉曲線也成立。這類曲線的全曲率定義爲

$$\mu=\int_0^L|\kappa|ds+\sum_i a_i, \tag{14}$$

其中a_i是在頂點的角。換句話說，在這種情況，其切線像是由幾段弧組成的，每一段弧對應於C的一段光滑弧；將相鄰的頂點用單位球面上的最短的大圓弧連接起來，如此得到的曲線的長就是C的全曲率。能够證明，對逐段光滑的曲線$\mu\geq 2\pi$ 也成立。

我們希望給出 Fenchel 定理的另一個證明以及與之相關的關於紐結的全曲率的Fary-Milnor定理，參看Fary (*Bulletin de la société Mathematique de France*, 77 (1949), 128-138) 和 J. Milnor (*Annals of Mathematics*, 52 (1950), 248-257)。其基礎是關於在單位球面上與一段弧相交的大圓的測度的 Crofton 定理。每一個定向大圓決定唯一的

“極”， 即這個圓所在平面的單位法向量的端點。 在單位球面上的大圓的集合的測度指的就是它們的極所構成的區域的面積。 Crofton 定理說明如下:

定理:

設Γ是單位球面 Σ_0 上的一段光滑弧，則與Γ相交的定向大圓的測度（每個定向大圓計算的次數等於它與Γ的交點的個數）等於Γ的長度的 4 倍。

〔證明〕

設Γ表示爲單位向量作爲它的弧長 s 的函數 $e_1(s)$，局部地（即在 s 的某個鄰域），設$e_2(s)$和 $e_3(s)$ 是光滑地依賴於 s 的單位向量，其數量積

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij},\quad 1\leq i,\ j\leq 3, \tag{15}$$

且

$$\det(e_1,e_2,e_3)=+1, \tag{16}$$

則有

$$\begin{cases}\dfrac{de_1}{ds}=a_2e_2+a_3e_3,\\[2mm] \dfrac{de_2}{ds}=-a_2e_1+a_1e_3,\\[2mm] \dfrac{de_3}{ds}=-a_3e_1-a_1e_2。\end{cases} \tag{17}$$

在上列方程組中係數矩陣的反稱性可以由方程式(15)的微分得到。因爲 s 是Γ的弧長，則有

$$a_2^2+a_3^2=1, \tag{18}$$

故可命

$$a_2=\cos\tau(s),\quad a_3=\sin\tau(s)。 \tag{19}$$

若一個定向大圓與Γ相交於點$e_1(s)$，它的極就是

$$Y=\cos\theta e_2(s)+\sin\theta e_3(s),$$

反之亦然。於是，(s，θ) 可以作爲這些極構成的區域內的局部座標；我們希望找出這個區域的面積元素的一個表示式。

爲此，我們計算

$$\begin{aligned}dY=&(-\sin\theta e_2+\cos\theta e_2)(d\theta+a_1ds)\\ &-e_1(a_2\cos\theta+a_3\sin\theta)ds。\end{aligned}$$

因爲$-\sin\theta e_2+\cos\theta e_3$和 e_1 是垂直於Y的兩個單位向量，所以，Y的面積元素是

$$\begin{aligned}|dA|&=|a_2\cos\theta+a_3\sin\theta|d\theta ds\\ &=|\cos(\tau-\theta)|d\theta ds,\end{aligned} \tag{20}$$

其中在左邊的絕對值說明計算的面積指的是測度而不是有向的。

設$Y^\perp$是以Y爲極的定向大圓，$n(Y^\perp)$ 是$Y^\perp$和Γ的交點的個數，則在定理中所說的μ就是

$$\mu=\int n(Y^\perp)dA=\int_0^\lambda ds\int_0^{2\pi}|\cos(\tau-\theta)|d\theta,$$

其中λ是Γ的長。當θ由 0 到 2π 時，對固定的 s，$|\cos(\tau-\theta)|$ 的變差是 4。我們我們得到

$$\mu=4\lambda,$$

這就證明了Crofton定理。

〔證完〕

應用這一定理到每一段子弧並相加，我們看到，當Γ是單位球面上的分段光滑的曲線時定理的結論也成立。事實上，這個定理對球面上的任何可求長曲線都成立，但是其證明很長。

對空間閉曲線，若其切線像滿足Crofton定理的條件，則Fenchel 定理是一個容易得到的結果。事實上，Fenchel 定理的證明告訴我們，一條空間閉曲線的切線像與每個大圓相交至少兩點，即 $n(Y^\perp)\geq 2$。這就得到它的長是

$$\lambda=\int|\kappa|ds=\frac{1}{2}\int n(Y^\perp)|dA|\geq 2\pi,$$

因爲單位球面的全面積是 4π。

Crofton定理還能導出下面的Fary和Milnor 的定理，它給出關於紐結的全曲率的一個必要條件。

定理:

一個紐結的全曲率$\geq 4\pi$。

因爲“高度函數”$Y \cdot X(s)$的極大值或極小值的個數 $n(Y^{\perp})$ 必爲偶數。假設空間閉曲線C的全曲率$<4\pi$，則存在 $Y\in\Sigma_0$，使得$n(Y^{\perp})=2$。現不妨假設 Y 就是點(0，0，1)，這總可以經過一個旋轉達到。則函數$x_3(s)$僅有一個極大值和一個極小值。相應的這兩個點把 C 分成兩部分，在其中的一部分 x_3 是增加的，而在另一部分 x_3 是減少的。在這兩個端點的水平面之間的每一個水平面與C都相交於兩點。假使把它們用線段連接起來，所有這些線段將構成同胚於一個圓盤的曲面，這就證明了C不是“紐結”。

爲進一步閱讀，可以看:

1. S. S. Chern and R. K. Lashof, “On the total curvature of immersed manifolds”, I, *American Journal of Mathematics*, 79 (1957), 302-318, 以及 II, *Michigan Mathematical Journal*, 5 (1958), 5-12。

2. N. H. Kuiper, “Convex immersions of closed surfaces in E^5”, *Comm. Math. Helv*, 35 (1961), 85-92。

關於積分幾何，可看本書② 中的Santalo文章。

5. 空間曲線的變形

大家都知道，在兩條曲線之間若存在一個一一對應，使對應點有相等的弧長、曲率（假設$\neq 0$）和撓率，則它們僅差一個空間的運動。自然地，我們將考慮在對應點僅有相等的弧長和曲率的對應。我們將這種對應叫做空間曲線的變形。在這方面最重要的結果是 A. Schur 的定理，它說明這樣的幾何事實：假使一段弧被“伸張開來”，則它的端點之間的距離將變長。以下所說的曲率均指絕對值。現將Schur定理敍述如下。

定理:

設C是曲率爲 $\kappa(s)$ 的平面弧，它和它的弦AB一起構成一條凸曲線。

② “本書”是指 *Studies in Global Geometry and Analysis*，見273頁脚注。積分幾何方面的書還可以看 L. A. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Probability*, London Wisley, 1976.

設曲線C^*與C有相同的參數和弧長，且其曲率$\kappa^*(s)\leq\kappa(s)$。若d^*和 d 分別表示連結C^*及C的端點的弦長，則 $d\leq d^*$。而且等號成立，必須且只須C和C^*是全等的。

〔證明〕

設Γ和Γ^*分別爲C和C^*的切線像，P_1和P_2是Γ上的兩點，P_1^* 和 P_2^* 是它們在Γ^*上的對應點。用 $\widehat{P_1P_2}$ 和 $\widehat{P_1^*P_2^*}$ 表示它們的弧長，而用$\overline{P_1P_2}$和$\overline{P_1^*P_2^*}$表示它們的球面距離。則有

$$\overline{P_1P_2}\leq\widehat{P_1P_2},\quad \overline{P_1^*P_2^*}\leq\widehat{P_1^*P_2^*}。$$

關於曲率的不等式意味着

$$\widehat{P_1^*P_2^*}\leq\widehat{P_1P_2}。\tag{21}$$

因爲C是凸的，Γ在一個大圓上，若假定$\widehat{P_1P_2}\leq\pi$，則有

$$\overline{P_1P_2}=\widehat{P_1P_2}。$$

現在假設Q是C上的一點，且過這一點的切線平行於這段弧的弦。用P_0表示這一點在Γ上的像。於是，對Γ 上的任一點P，$\widehat{P_0P}\leq\pi$ 皆能滿足。若用P_0^*表示P_0在Γ^*上的對應點，則有

$$\overline{P_0^*P^*}\leq\widehat{P_0P}=\overline{P_0P}。\tag{22}$$

由此得到

$$\cos\overline{P_0^*P^*}\geq\cos\overline{P_0P},\tag{23}$$

這是因爲餘弦函數在0與π之間是單調減小的函數。

因爲C是凸的，d 是C在它的弦上的投影:

$$d=\int_0^L\cos\overline{P_0P}\,ds。\tag{24}$$

另一方面，我們有

$$d^*\geq\int_0^L\cos\overline{P_0^*P^*}\,ds,\tag{25}$$

因爲右邊的積分等於C^*的投影，也就是連接端點的弦在Q的對應點Q^*的切線上的投影。於是，由(23)，(24)和(25)就得到

$$d^* \geq d。$$

假設$d = d^*$，則(22)，(23)和(25)皆爲等式，且連接C^*的端點A^*和B^*的弦必平行於在Q^*的切線。特別，

$$\overline{P_0^*P^*} = \overline{P_0P},$$

這就說明A^*Q^*和B^*Q^*是平面弧。另一方面，利用(21)就得到

$$\overline{P_0^*P^*} \leq \widehat{P_0^*P^*} \leq \widehat{P_0P} = \overline{P_0P},$$

或

$$\widehat{P_0^*P^*} = \widehat{P_0P}。$$

因此，弧A^*Q^*和B^*Q^*與AQ和BQ在對應點有相同的曲率，所以它們是全等的。

剩下來要證明的是弧A^*Q^*和B^*Q^*在同一平面上。假若不然，則曲線在Q^*的切線必爲它們所在平面的交線。因爲這條直線是平行於弦A^*B^*的，唯一的可能是它包含A^*和B^*；然而，由此可知C在Q的切線也必包含其端點A和B。這就得出矛盾。因此，C^*是平面弧且與C全等。

〔證完〕

Schur 定理有許多應用。例如，它給出下列極小問題的一個解：決定曲率$\kappa(s) \leq 1/R$的最短閉曲線，其中R爲一常數，其答案爲一圓周。

附注

曲率$\kappa(s) \leq 1/R$（R爲常數）的最短閉曲線是一半徑爲R的圓周。

由 Fenchel 定理的推論，這樣一條曲線的長爲$2\pi R$。將它與一半徑爲R的圓周比較，由Schur定理($d^* = d = 0$)就可以推斷它必爲圓周。

作爲 Schur 定理的第二個應用，我們將導出 Schwarz 定理。它是與連接給定的兩點以給定的常數爲曲率的上界的弧的長度有關的。現敍述 Schwarz 定理如下：

定理：

設C是連接給定點A和B的弧，其曲率$\kappa(s) \leq 1/R$，且$R \geq \frac{1}{2}d$，其中$d = \overline{AB}$。設S爲通過A和B的、半徑爲R的圓周。則C的長度必$\leq S$上的劣弧AB，或$\geq S$上的優弧AB。

〔證明〕

注意，定理中假設$R \geq \frac{1}{2}d$對圓周S的存在是必要的。爲證明這一定理，我們不妨假設C的長$L < 2\pi R$，否則就不需要證明了。於是，我們將C與在S上具有相同長度的弧作比較，並設此弧的弦長爲d'。因此，Schur定理的條件滿足，這就得到$d' \leq d$，d是A和B之間的距離。所以，$L \geq S$上的對應於弦AB的優弧的長，或$\leq$對應於弦AB的劣弧的長。

〔證完〕

特別，我們考慮連接A和B而曲率爲$1/R(R \geq d/2)$的弧。這樣的弧的長度沒有上界，例如圓螺旋線。它們以d爲下界，但可以儘可能地接近d。所以這是一個沒有解的極小問題的例子。

最後，我們附帶說明 Schur 定理能推廣到分段光滑的曲線，現不加證明地把這個推廣說明如下。

附注

設C和C^*是具有相同長度的兩條分段光滑的曲線，且C與它的弦構成一條簡單的平面凸曲線。取以一個端點爲起點的弧長作爲參數，設$\kappa(s)$是C在正常點的曲率，$\alpha(s)$是在頂點的切向之間的角；在C^*上相應的量用相同的符號加上星號表示。d和d^*分別表示C和C^*的端點之間的距離。於是，若

$$\kappa^*(s) \leq \kappa(s)$$

和

$$\alpha^*(s) \leq \alpha(s),$$

則有

$$d^* \geq d。$$

並且等號成立必須且須

$$\kappa^*(s) = \kappa(s)$$

和

$$a^*(s)=a(s)。$$

最後的條件並不意味著 C 和 C^* 是全等的。事實上，在空間中存在不全等的多邊形，而且有相等的邊和角。

6. Gauss-Bonnet公式

我們考慮曲面M上的內蘊 Riemann幾何。為簡化計算且不失一般性，假設在曲面上取等溫參數 u 和 v：

$$ds^2=e^{2\lambda(u,v)}(du^2+dv^2), \tag{26}$$

則面積元素為

$$dA=e^{2\lambda}dudv, \tag{27}$$

區域D的面積為積分

$$A=\iint_D e^{2\lambda}dudv, \tag{28}$$

曲面的Gauss曲率是

$$K=-e^{-2\lambda}(\lambda_{uu}+\lambda_{vv})。 \tag{29}$$

大家已經知道由Riemann度量定義的Levi-Civita平行性。為解析地表示出來，我們記

$$u^1=u,\ u^2=v, \tag{30}$$

和

$$ds^2=\sum g_{ij}du^idu^j。 \tag{31}$$

在上式及以下的討論中，小寫拉丁字母在 1 到 2 的範圍內變化，並且求和符號表示對所有的重複指標求和。由g_{ij}通過方程

$$\sum g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k \tag{32}$$

引進g^{ij}，以及由

$$\begin{cases}\Gamma_{ijk}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}+\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial u^j}\right),\\ \Gamma^j_{i\,k}=\sum g^{jh}\Gamma_{ihk}\end{cases} \tag{33}$$

得到Christoffel符號。對一個以 ξ^i 為分量的向量，Levi-Civita 平行決定於"協變微分"

$$D\xi^i=d\xi^i+\sum\Gamma^i_{j\,k}du^k\xi^j。 \tag{34}$$

所有這些方程都是在經典Riemann幾何中熟知的，它們由初步的張量分析就可以得到。以下是新的概念。假設曲面是定向的。考慮M的全體單位切向量所構成的空間B。這個空間B是三維的，因為具有相同起點的全體單位向量構成一維空間。（空間B叫做一個纖維空間，也就是說在一個鄰域中，每一點上所有的單位切向量構成的空間，在拓撲上是一個乘積空間。）對一個單位切向量

$$\xi=(\xi^1,\xi^2),$$

命

$$\eta=(\eta^1,\eta^2)$$

是垂直於 ξ 的一個單位切向量，且 ξ 和 η 構成一個正的定向。顯然，η 是由 ξ 唯一決定的，現引進線性微分形式

$$\varphi=\sum_{1\le i,j\le 2}g_{ij}D\xi^i\eta^j, \tag{35}$$

則 φ 在 B 上定義，通常稱它為連絡形式。

因為 ξ 是單位向量，我們能將它的分量寫成如下的形式：

$$\xi^1=e^{-\lambda}\cos\theta,\ \xi^2=e^{-\lambda}\sin\theta。 \tag{36}$$

於是

$$\eta^1=-e^{-\lambda}\sin\theta,\ \eta^2=e^{\lambda}\cos\theta。 \tag{37}$$

經過計算得到

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{1\,1}=\Gamma^2_{1\,2}=-\Gamma^1_{2\,2}=\lambda_u,\\ \Gamma^1_{1\,2}=\Gamma^2_{2\,2}=-\Gamma^2_{1\,1}=\lambda_v。\end{gathered} \tag{38}$$

由此得到重要的關係式

$$\varphi=d\theta-\lambda_vdu+\lambda_udv, \tag{39}$$

求外微分得到

$$d\varphi=-KdA。 \tag{40}$$

方程(40)或許是二維局部Riemann幾何中最重要的公式。

連絡形式φ是B上的一個微分形式。如果在M的一個子集上定義一個單位切向量場，則可利用φ得到此子集的一個微分形式。例如，設C是M上一條光滑曲線。其弧長爲s，$\xi(s)$是沿C的一個光滑單位切向量場，則

$$\varphi=\sigma ds,$$

σ稱爲ξ沿C的變差。如果$\sigma=0$，向量場ξ叫做沿C平行的。若ξ與C處處相切，則σ稱爲C的測地曲率。如果沿C的單位切向量是平行的，即其測地曲率爲零，則C是M上的一條測地線。

考慮M的一個區域D，在D上定義了一個單位切向量場，它有一個孤立奇點P_0，P_0是D的一個內點。設r_ε是以P_0爲中心、半徑爲ε的測地圓。則由方程式(30)，極限

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r_\varepsilon}\varphi \tag{41}$$

是一個整數，稱爲向量場在P_0的指數。

圖17給出一些具有孤立奇點的向量場的例子。它們分別是：(a)源點或

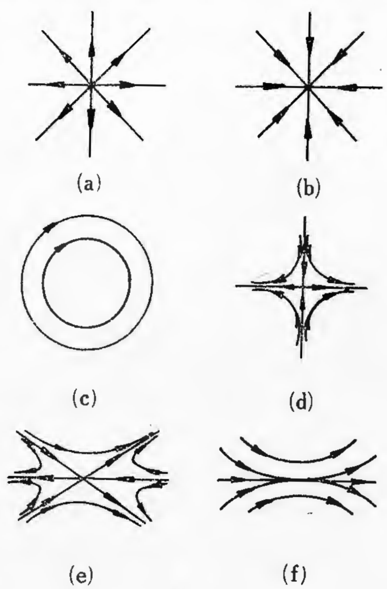

圖 17

極大，(b)淵點或極小，(c)中心點，(d)簡單鞍點，(e)猴鞍點，(f)雙極點。它們的指數分別是1，1，1，－1，－2和2。

所謂Gauss-Bonnet公式就是下面的定理。

定理:

設D是M的一個緊緻的定向區域，其邊界是分段光滑的曲線C。則

$$\int_C\kappa_g ds+\int_D KdA+\sum_i(\pi-\alpha_i)=2\pi\chi, \tag{42}$$

其中κ_g是C的測地曲率，$\pi-\alpha_i$是在頂點的外角，χ是D的Euler示性數。

〔證明〕

首先考慮D屬於一個座標域(u,v)的情形，且其邊界C爲一n邊的簡單多邊形，設其邊爲C_i，頂角爲α_i，$1\le i\le n$。假設D是正定向的。對弧C_i的每一點都有C_i的一個單位切向量。這樣，在每一個頂點就有兩個切向量，其夾角爲$\pi-\alpha_i$。由切線回轉定理（見1.），在繞C一周時θ的全變差爲

$$2\pi-\sum_i(\pi-\alpha_i),$$

這就得到

$$\int_C\kappa_g ds=2\pi-\sum_i(\pi-\alpha_i)+\int_C -\lambda_v du+\lambda_u dv。$$

由Stokes 定理，上式右端的積分等於$-\iint_D KdA$。於是，公式在這一特殊情況下得到證明。

對一般情況，設D被重分爲一些多邊形$D_\lambda(\lambda=1,\cdots,f)$的聯，使得：1）每一個$D_\lambda$屬於一個座標域 2）兩個$D_\lambda$或者沒有公共點，或者有一個公共的頂點，或者有一個公共的邊。此外，設D_λ有由D誘導的定向，所以每一條內邊在不同的多邊形中有相反的方向。設v和e分別爲D的在這個重分中的內頂點和內邊的數目，即不在C上的頂點數和邊數。則上面的公式能應用於每一個D_λ。將所有的這些關係式相加，因爲沿每一條內邊的測地曲率的積分抵消，則得到

$$\int_C K_g ds+\int_D KdA$$

$$=2\pi f-\sum_{i,\lambda}(\pi-\alpha_{\lambda i})-\sum_{i}(\pi-\alpha_i),$$

其中α_i是在D的頂點的角，而在右邊的第一個和式是在這個重分的全體內頂點上展開的。因爲每一條內邊恰是兩個D_λ的邊，以及關於一個頂點的內角和是2π，於是，這個和等於

$$-2\pi e+2\pi v。$$

整數

$$\chi(D)=v-e+f \tag{43}$$

稱爲D的 Euler 示性數，代入上式就得到(42)。由之還得出整數χ不依賴D的重分。

〔證完〕

特別，若C沒有頂點，則有

$$\int_C \kappa_g ds+\iint_D KdA=2\pi\chi。 \tag{44}$$

此外，若D就是曲面M，則得到

$$\iint_C KdA=2\pi\chi。 \tag{45}$$

由此可知，若$K=0$，則M的示性數爲零，且M同胚於環面。若$K>0$，則$\chi>0$，且M同胚於球面。

在曲面上的向量場的研究中，Euler示性數有著重要的地位。

附注

在定向閉曲面M上，具有有限個奇點的向量場的指數和等於M的示性數$\chi(M)$。

〔證明〕

設$p_i(1\leq i\leq n)$是這個向量場的奇點。$r_i(\varepsilon)$是以p_i爲中心、ε爲半徑的測地圓，$\Delta_i(\varepsilon)$是$r_i(\varepsilon)$所圍的圓盤。在區域$M-\bigcup_i\Delta_i(\varepsilon)$上積分$KdA$，並利用方程式(40)就得到

$$\iint_{M-\bigcup_i\Delta_i(\varepsilon)} KdA=\sum_i\int_{r_i(\varepsilon)}\varphi,$$

其中$r_i(\varepsilon)$是定向的，使它是$\Delta_i(\varepsilon)$的邊界。命$\varepsilon\to 0$就得到定理。

〔證完〕

我們給出 Gauss-Bonnet公式的兩個進一步的應用。第一個是Jacobi定理。設$x(s)$是空間閉曲線的定位向量，s是它的弧長。$T(s)$，$N(s)$和$B(s)$分別是單位切向量、單位主法向量和單位次法向量。特別，以$N(s)$爲定位向量得到的在單位球面上的曲線就是主法線像。它的切線處處存在，如果在每一點的

$$\kappa^2+w^2\neq 0, \tag{46}$$

其中$\kappa(\neq 0)$和w分別爲曲線$x(s)$的曲率和撓率。下面就是 Jacobi 定理。

定理:

若一條空間閉曲線的主法線像的切線處處存在，則它分單位球面爲面積相等的兩部分。

〔證明〕

爲證明這個定理，我們由下列方程決定τ:

$$\kappa=\sqrt{\kappa^2+w^2}\cos\tau,\qquad w=\sqrt{\kappa^2+w^2}\sin\tau, \tag{47}$$

則有

$$d(-\cos\tau T+\sin\tau B)$$
$$=(\sin\tau T+\cos\tau B)d\tau-\sqrt{\kappa^2+w^2}Nds。$$

因此，若σ是$N(s)$的弧長，$\dfrac{d\tau}{d\sigma}$是$N(s)$在單位球面上的測地曲率。設D是以$N(s)$爲邊界的區域之一。因爲$K=1$，由Gauss-Bonnet公式得到

$$\int_{N(s)}d\tau+\iint dA=2\pi,$$

這就得到$A=2\pi$。

〔證完〕

第二個應用是關於凸曲面的Hadamard定理。

定理:

若在歐氏空間中的一個定向閉曲面的 Gauss 曲率恒爲正數，則它必爲凸曲面（即它在其每一個切平面的一邊）。

在 1. 中我們曾對曲線討論過類似的定理。對曲面，不必假設它是不自交的。

〔證明〕

由 Gauss-Bonnet 定理得到曲面M的 Euler 示性數是正數，所以

$$\chi(M)=2,$$

且

$$\iint_M K\,dA=4\pi。$$

假設M是定向的。我們考慮Gauss映射

$$g:M\to\Sigma_0 \tag{48}$$

（其中Σ_0是以O爲中心的單位球面），它把M的每一點p，對應於以O爲起點的平行於M在P點的單位法向量的終點。條件$K>0$保證了g在每一點都有非零的函數行列式，因而在局部上是一對一的。由此得到$g(M)$是Σ_0的開子集。因爲M是緊緻的，$g(M)$是Σ_0的緊緻子集。因此$g(M)$也是閉的。所以，g是在上的映射。

假設g不是一對一的，即存在M上的不同的兩點p和q，使$g(p)=g(q)$。則有q的一個鄰域U，使得$g(M-U)=\Sigma_0$。因爲$\iint_{M-U} K\,dA$是$g(M-U)$的面積，故

$$\iint_{M-U} K\,dA\geq 4\pi。$$

但是

$$\iint_U K\,dA>0,$$

所以

$$\iint_M K\,dA=\iint_U K\,dA+\iint_{M-U} K\,dA>4\pi,$$

這就得到矛盾。Hadamard 定理證畢。

〔證完〕

Hadamard 定理在$K\geq 0$這一較弱條件下也成立，但是其證明比較困難；可以看4.中提到的Chern-Lashof的文章。

爲進一步閱讀，可以看：

1. S. S. Chern, "On the Curvatura integra in a Riemannian manifold", *Annals of Mathematics*, 46 (1945), 674-684.

2. H. Flander, "Development of an extended exterior differential calculus", *Transactions of the American Mathematical Society*, 75 (1953), 311-326.

7. Cohn-Vossen和Minkowski的唯一性定理

Cohn-Vossen 的剛硬性定理可以敍述如下。

定理：

在兩個閉凸曲面之間的一個等距對應必爲一運動，或一運動加反射。

換句話說，這樣的一個等距是平凡的。顯然，這個定理在局部是不成立的。以下的證明是G. Herglotz 的工作。

〔證明〕

我們首先將討論關於歐氏空間中的曲面理論的一些概念。設曲面S表示爲它的定位向量X作爲參數u和v的函數。並假設有直到二階的連續的偏導數，且X_u和X_v在每一點都是線性無關的，ξ是單位法向量，使S成爲定向的。命

$$\mathrm{I}=dX\cdot dX=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \tag{49}$$
$$\mathrm{II}=-dX\cdot d\xi=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2,$$

分別稱爲曲面的第一和第二基本形式，H和K分別表示平均曲率和 Gauss 曲率。

只須證明在等距對應下它們的第二基本形式是相等的。設取局部座標使在對應點有相同的局部座標。於是，對這兩個曲面，E，F和G都是相等的，且有相同的Christoffel記號。設第二個曲面爲S^*，相應的量用相同的記號加上星號表示。現引進

$$\lambda=\frac{L}{D},\quad \mu=\frac{M}{D},\quad \nu=\frac{N}{D}, \tag{50}$$

其中$D=\sqrt{EG-F^2}$，則Gauss曲率爲

$$K=\lambda\nu-\mu^2=\lambda^*\nu^*-\mu^{*2}, \tag{51}$$

即這兩個曲面有相同的Gauss曲率。平均曲率分別爲

$$H=\frac{1}{2D}(G\lambda-2F\mu+E\nu), \tag{52}$$

$$H^*=\frac{1}{2D}(G\lambda^*-2F\mu^*+F\nu^*)。$$

進一步引進

$$J=\lambda\nu^*-2\mu\mu^*+\nu\lambda^*。\tag{53}$$

定理的證明依賴下面的恒等式:

$$DJ\xi=\frac{\partial}{\partial u}(\nu^*X_u-\mu^*X_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\mu^*X_u-\lambda^*X_v)。\tag{54}$$

首先注意，Codazzi方程式能通過λ^*, μ^*, ν^*表示爲下列形式:

$$\begin{cases}\lambda_v^*-\mu_u^*+\Gamma_{22}^2\lambda^*-2\Gamma_{12}^2\mu^*+\Gamma_{11}^2\nu^*=0,\\ \mu_v^*-\nu_u^*-\Gamma_{22}^1\lambda^*+2\Gamma_{12}^1\mu^*-\Gamma_{11}^1\nu^*=0。\end{cases}\tag{55}$$

其次，Gauss方程式爲

$$\begin{cases}X_{uu}-\Gamma_{11}^1X_u-\Gamma_{11}^2X_v-D\lambda\xi=0,\\ X_{uv}-\Gamma_{12}^1X_u-\Gamma_{12}^2X_v-D\mu\xi=0,\\ X_{vv}-\Gamma_{22}^1X_u-\Gamma_{22}^2X_v-D\nu\xi=0。\end{cases}\tag{56}$$

將上列方程式分別乘以$X_v, -X_u, \nu^*, -2\mu^*$和$\lambda^*$，再相加就得到(54)。

設

$$\begin{cases}p=X\cdot e_3,\\ y_1=X\cdot X_u,\\ y_2=X\cdot X_v,\end{cases}\tag{57}$$

式中的右端是向量的數量積。故$p(u, v)$就是從原點到在$X(u, v)$的切平面的有向距離。將方程(54)的兩邊對X作數量積就得到

$$\begin{aligned}DJp=&-\nu^*E+2\mu^*F-\lambda^*G\\ &+(\nu^*y_1-\mu^*y_2)_u-(\mu^*y_1-\lambda^*y_2)_v。\end{aligned}\tag{58}$$

設C是S上的一條閉曲線，它將S分成兩個區域: D_1和D_2，均以C爲邊界。此外，C作爲D_1和D_2的邊界所誘導的定向有相反的方向。對每一個區域應用Green公式，先看D_1:

$$\iint_{D_1}JpdA=\iint_{D_1}(-\nu^*E+2\mu^*F-\lambda^*G)dudv\tag{59}$$

$$+\int_C(\mu^*y_1-\lambda^*y_2)du+(\nu^*y_1-\mu^*y_2)dv。$$

對D_2也有類似的等式，將它們相加，並注意到線積分抵消，這就得到

$$\iint_S JpdA=\iint_S(-\nu^*E+2\mu^*F-\lambda^*G)dudv。$$

由方程式(52)，

$$\iint_S JpdA=-2\iint_S H^*dA。\tag{60}$$

特別，當S和S^*恒同時，就得到

$$\iint_S 2KpdA=-2\iint_S HdA。\tag{61}$$

將上面的兩個方程式相減就得到:

$$\begin{aligned}\iint_S\begin{vmatrix}\lambda^*-\lambda & \mu^*-\mu\\ \mu^*-\mu & \nu^*-\nu\end{vmatrix}pdA\\ =2\iint_S H^*dA-2\iint_S HdA。\end{aligned}\tag{62}$$

爲完成定理的證明，我們需要下面的初等的引理。

引理:

設

$$ax^2+2bxy+cy^2,\quad a'x^2+2b'xy+c'y^2\tag{63}$$

都是正定的二次型，且

$$ac-b^2=a'c'-b'^2,\tag{64}$$

則

$$\begin{vmatrix}a'-a & b'-b\\ b'-b & c'-c\end{vmatrix}\leq 0,\tag{65}$$

且等號成立必須這兩個二次型是恒等的。

〔證明〕

不妨設$b'=b$，因爲這總可以經過對變量的適當的線性變換達到，而

引理的條件在變量的線性變換下是不變的。這樣，方程式(65)的左端就變爲

$$(a'-a)(c'-c)=-\frac{c}{a}(a'-a)^2,$$

這就證明了不等式(65)。此外，等式成立僅當$a'=a$和$c'=c$。

現在選取原點使它在S的裏面。故$p>0$。則方程式(62)的左邊的積分是非正的，因此得到

$$\iint_S H^* dA \leq \iint_S H dA。$$

因爲S和S^*之間的關係是對稱的，故又有

$$\iint_S H dA \leq \iint_S H^* dA。$$

因此

$$\iint_S H dA = \iint_S H^* dA。$$

這就得到方程式(62)的左端的積分爲零。於是，

$$\lambda^*=\lambda,\quad \mu^*=\mu,\quad \nu^*=\nu,$$

這就完成了 Cohn-Vossen 定理的證明。

〔證完〕

由Hadamard定理，我們看到，對$K>0$的閉曲面，Gauss映射

$$g: S \to \Sigma_0$$

是一對一的。因此，S上的點能够表示成爲它的法向ξ的函數，進一步，S上的任何數量函數也都可以表示爲ξ的函數。Minkowski定理説明，當$K(\xi)$爲已知時，S唯一決定。

定理:

設S是閉凸曲面，其Gauss曲率$K>0$。則函數$K(\xi)$決定S僅差一個平移。

〔證明〕

我們將以上面的證明作爲模型，利用積分公式給一個證明（參看S. S. Chern, *American Journal of Mathematics*, 79 (1957), 949-950)。設u和v是單位球面上的等溫參數，故有

$$\begin{cases}\xi_u^2=\xi_v^2=A>0, \\ \xi_u\cdot\xi_v=0。\end{cases} \tag{66}$$

通過映射g^{-1}我們也取u和v作爲S上的參數。因爲ξ_u和ξ_v都垂直於ξ且是線性無關的，故每一個垂直於ξ的向量都可以表示爲它們線性組合。由於

$$X_u\cdot\xi_v=X_v\cdot\xi_u,$$

故可將X_v和X_u表示爲

$$\begin{cases}-X_u=a\xi_u+b\xi_v, \\ -X_v=b\xi_u+c\xi_v。\end{cases} \tag{67}$$

將這兩個方程式與ξ_u和ξ_v作內積，則有

$$Aa=L,\quad Ab=M,\quad Ac=N。 \tag{68}$$

此外，再將(67)中兩個方程式的兩邊作向量積，得到

$$X_u\times X_v=(ac-b^2)(\xi_u\times\xi_v)。$$

但是

$$X_u\times X_v=D\xi,\quad \xi_u\times\xi_v=A\xi, \tag{69}$$

連繫方程式(68)就得到

$$D=A(ac-b^2)=\frac{KD^2}{A},$$

於是

$$A=KD,\quad ac-b^2=\frac{1}{K}。 \tag{70}$$

因爲$Adudv$和$Ddudv$分别是Σ_0和S的體積元素，方程式(70)的第一式表示了K是這些體積元素之比這一熟知的事實。

假設S^*是具有相同的函數$K(\xi)$的另一個凸曲面。我們建立S和S^*之間的一個同胚，使它們在對應點有相同的法向，則參數u和v可作爲S和S^*的參數，且對應點有相同的參數值。對S^*的相應的函數和向量用相同的記號加上星號表示。因爲$K=K^*$，由方程式(70)得到

$$ac-b^2=a^*c^*-b^{*2},$$
$$D=D^*。$$

設

$$p=X\cdot\xi,\quad p^*=X^*\cdot\xi, \tag{71}$$

它們是從原點到這兩個曲面的切平面的距離。基本的關係是恒等式

$$\begin{aligned}(X,X^*,X_u)_v-(X,X^*,X_v)_u&=A\{2(ac-b^2)p^*+(-ac^*-a^*c+2bb^*)p\}\\&=A\left\{2(ac-b^2)(p^*-p)+\begin{vmatrix}a-a^* & b-b^*\\ b-b^* & c-c^*\end{vmatrix}p\right\}。\end{aligned}$$

這可以由方程式(67)、(69)、(70)和(71)立即得到。由這個恒等式，應用Green 定理就得到積分公式

$$\int_{\Sigma_0}\left\{2(ac-b^2)(p^*-p)+\begin{vmatrix}a-a^* & b-b^*\\ b-b^* & c-c^*\end{vmatrix}p\right\}\cdot Adudv=0。 \tag{72}$$

不妨假設原點在曲面S和S^*的內部（必要時可以經過平移達到），於是$p>0$以及$p^*>0$。因爲

$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\text{ 和 }\begin{pmatrix}a^* & b^*\\ b^* & c^*\end{pmatrix}$$

都是正定的矩陣，由前面的關於代數的引理得到

$$\begin{vmatrix}a-a^* & b-b^*\\ b-b^* & c-c^*\end{vmatrix}\leq 0。$$

因此，

$$\int_{\Sigma_0}(ac-b^2)(p^*-p)Adudv\geq 0。 \tag{73}$$

當將S和S^*交換時，相同的關係仍然成立。因此，方程式(73)左端的積分必恒等於零。則由方程式(72)得到

$$\int_{\Sigma_0}\begin{vmatrix}a-a^* & b-b^*\\ b-b^* & c-c^*\end{vmatrix}pAdudv=0,$$

這只有當$a=a^*$，$b=b^*$和$c=c^*$才有可能。由此可知

$$X_u^*=X_u,\quad X_v^*=X_v,$$

即S和S^*僅差一平移。

〔證完〕

爲進一步閱讀，可以看:

1. S. S. Chern, “Integral formulas for hypersurfaces in euclidean space and their applications to uniqueness theorems”, *Journal of Math. and Mech.*, 8 (1959), 947-955.

2. T. Otsuki, “Integral formulas for hypersurfases in a Riemannian manifold and their applications”, *Tôhoku Mathematical Jour.*, 17 (1965), 335-348.

3. K. Voss, “Differentialgeometrie geschlossener Flächen im euklidischen Raum”, *Jaresberichte deutscher Math. Verein*, 63 (1960-1961), 117-136.

8. 關於極小曲面的 Bernstein 定理

所謂極小曲面就是在局部上求解 Plateau 問題的曲面，即以給定空間曲線爲邊界的面積最小的曲面。在解析上，它可以由平均曲率恒等於零這一條件決定。假設曲面的方程式爲

$$z=f(x,y), \tag{74}$$

其中$f(x,y)$是二次連續可微的。於是，極小曲面就是偏微分方程式

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 \tag{75}$$

的解，其中

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}。$$

方程式(75)稱爲極小曲面方程式，它是非線性的橢圓型的微分方程式。

Bernstein 定理就是下面的“唯一性定理”。

定理:

若由方程式(74)表示的極小曲面對x和y的全部的值成立，則它必爲平

面。換句話說，方程式(75)的在整個(x,y)平面有效的唯一解是一個線性函數。

〔證明〕

我們將把這一定理歸結爲下面的Jörgens定理的推論。

定理:

設函數$z=f(x,y)$是方程

$$rt-s^2=1,\quad r>0 \tag{77}$$

的解，對全體x和y成立，則$f(x,y)$是關於x和y的二次多項式。

對固定的(x_0,y_0)和(x_1,y_1)考慮函數

$$h(\tau)=f(x_0+\tau(x_1-x_0),\ y_0+\tau(y_1-y_0)),$$

則有

$$h'(\tau)=(x_1-x_0)p+(y_1-y_0)q,$$

$$h''(\tau)=(x_1-x_0)^2r+2(x_1-x_0)(y_1-y_0)s+(y_1-y_0)^2t\geq 0,$$

其中在函數p,q,r,s,t中的自變量是$x_0+\tau(x_1-x_0)$和$y_0+\tau(y_1-y_0)$。從最後的一個不等式得到

$$h'(1)\geq h'(0),$$

或

$$(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)\geq 0, \tag{78}$$

其中

$$\begin{cases} p_i=p(x_i,y_i), \\ q_i=q(x_i,y_i), \end{cases}\quad i=0,1。 \tag{79}$$

考慮Lewy變換:

$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y)=x+p(x,y), \\ \eta=\eta(x,y)=y+q(x,y)。 \end{cases} \tag{80}$$

令

$$\begin{cases} \xi_i=\xi(x_i,y_i), \\ \eta_i=\eta(x_i,y_i), \end{cases}\quad i=0,1。 \tag{81}$$

由方程式(78)得

$$(\xi_1-\xi_0)^2+(\eta_1-\eta_0)^2\geq(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2, \tag{82}$$

因此，映射

$$(x,y)\to(\xi,\eta) \tag{83}$$

是使距離增加的。

此外，因爲

$$\xi_x=1+r,\quad \xi_y=s,$$
$$\eta_x=s,\quad \eta_y=1+t, \tag{84}$$

所以

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=2+r+t\geq 2, \tag{85}$$

由方程式(80)決定的映射是局部一對一的。由此可知，映射(83)是(x,y)平面到(ξ,η)平面上的微分同胚。

因此，我們可以將方程式(77)的解$f(x,y)$看作爲ξ和η的函數，命

$$F(\xi,\eta)=x-iy-(p-iq), \tag{86}$$

$$\zeta=\xi+i\eta。 \tag{87}$$

經計算即可看出，$F(\xi,\eta)$滿足 Cauchy-Riemann 方程式，故$F(\zeta)=F(\xi,\eta)$是ζ的正則函數。此外

$$F'(\zeta)=\frac{t-r+2is}{2+r+t}。 \tag{88}$$

從最後的這一關係式，我們得到

$$1-|F'(\zeta)|^2=\frac{4}{2+r+t}>0。$$

於是，$F'(\zeta)$在全ζ平面是有界的。由Liouville定理，

$$F'(\zeta)=\text{const}。$$

另一方面，由方程式(88)得到

$$\begin{cases} r=\dfrac{|1-F'|^2}{1-|F'|^2}。\\ s=\dfrac{i(\bar{F}'-F')}{1-|F'|^2},\\ t=\dfrac{|1+F'|^2}{1-|F'|^2}。\end{cases} \tag{89}$$

由此可知，r，s，t 都是常數，Jörgens定理得到證明。

Bernstein定理是Jörgens定理的容易得到的結果。事實上，命

$$W=(1+p^2+q^2)^{1/2}, \tag{90}$$

則極小曲面的方程式等價於下列方程式中的每一個:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{-pq}{W}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1+p^2}{W}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1+q^2}{W}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{-pq}{W}=0。\end{cases} \tag{91}$$

於是，存在一個C^2函數$\varphi(x,y)$使得

$$\begin{cases} \varphi_{xx}=\dfrac{1}{W}(1+p^2),\\ \varphi_{xy}=\dfrac{1}{W}pq,\\ \varphi_{yy}=\dfrac{1}{W}(1+q^2)。\end{cases} \tag{92}$$

這些偏導數滿足方程式

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi^2_{xy}=1,\ \varphi_{xx}>0。$$

由Jörgens定理，φ_{xx}, φ_{xy} 和 φ_{yy} 都是常數。因此，p 和 q 是常數，$f(x,y)$ 是線性函數（Bernstein 定理的這一證明是 J. C. C. Nitsche 給出的，可看 *Annals of Mathematics*, 66 (1957), 543-544)。

〔全完〕

關於極小曲面的許多文獻，可以看下面的綜合報告:

1. J. C. C. Nitsche, "On new results in the theory of minimal surfaces", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71 (1965), 195-270.

附錄二

微分幾何與理論物理

陳省身

我第一次看見周先生，是在 1930 年秋季，在清華。那年我從南開畢業，投考清華研究院數學系，考試科目中有"力學"，周先生是命題和閱卷人。他一見我就說: "我看過你的考卷"。1937 年我們在西南聯大同事，我還旁聽過他的"電磁學"。

微分幾何和理論物理都用微積分作工具，一者研究幾何現象，一者研究物理現象。後者自然廣泛些。但任何物理現象都在空間發生，所以前者又是後者的基礎。兩者都用推理的方法，但理論物理還須有試驗來支持。幾何不受這個限制，因此選擇問題比較自由，但推理要有數學的嚴格性。這個自由度把數學推到新的領域。有數學經驗和遠見的人，能在大海航行下，達到重要的新的領域。例如，廣義相對論所需要的黎曼幾何和規範場論所需要的纖維空間內的連絡，都在物理應用前為數學家所發展。這個"殊途同歸"的現象眞令人有神秘之感。

微分幾何與理論物理的關係非言可盡。本文只略舉幾點，間附拙見，請大家指教。

1. 動力學和活動標架

在動力學中要描寫一個固體的運動，就把一個標架堅固的裝在固體上，而描寫標架的運動。在三度空間的所謂標架指一點x，及經過x的互相垂直的單位矢量e_i，$i=1, 2, 3$。如 x 亦代表點x的座標矢量，則有

① 本文原載"理論物理與力學論文集"，科學出版社，1982 年，文中的周先生是指周培源教授。