10. 設 $a>0$，及 $x>1$，試證

$$\frac{x^{a+1}-x^{-a-1}}{x^a-x^{-a}} \geqslant \frac{a+1}{ax}$$

第六章

凸函數及蕭爾定理

§6.1 凸函數與凹函數

在解析幾何中，我們常用 X，Y 兩個坐標來表示兩個數 x，y 的關係．通常我們稱 x 爲變數 y 爲 x 之函數．有時我們用 $y=f(x)$ 來表示 y 與 x 的關係．例如

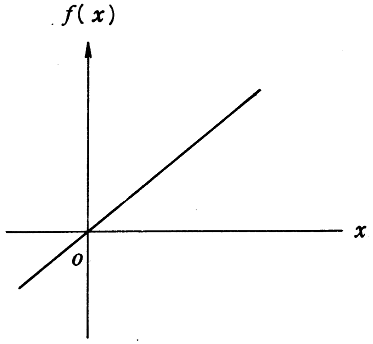
$$f(x) = x^2 + 2$$

$$f(x) = \sin x + \tan x$$

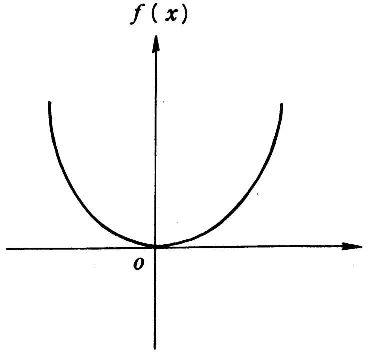
$$f(x) = x \log x$$

$$f(x) = 2^x$$

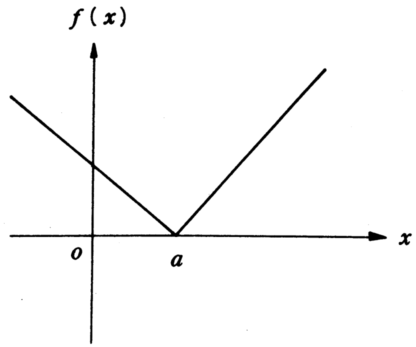
都是 x 的函數．我們要記住這裏的 x 在三角函數時代表的是弧度．（參看§3.3）在圖 1.1 a － f 中我們畫了一些常用函數的圖形．



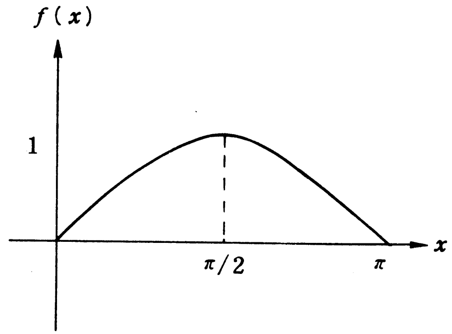
(1.1a)　$f(x)=x$



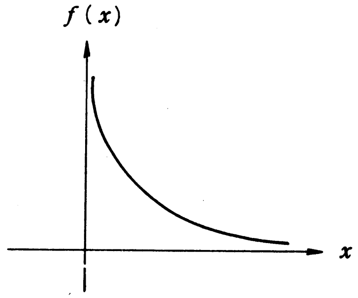
(1.1b)　$f(x)=x^2$



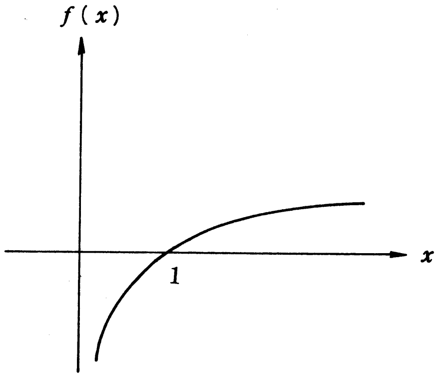
(1.1c) $f(x)=|x-a|$



(1.1d) $f(x)=\sin x \quad 0\leqslant x\leqslant\pi$



(1.1e) $f(x)=\dfrac{1}{x} \quad x>0$



(1.1f) $f(x)=\log x$

從上面六個圖形我們可以看到有些 $f(x)$ 的圖形像一個向上放着的碗(如圖 1.1 b, c, e),及有些圖形像一個蓋著的碗(例如 1.1 d, f),我們把第一類的函數稱之爲凸函數(對 x 軸而言是凸的),而第二類的函數稱爲凹函數. 其中圖 1.1 a, $f(x)=x$ 是這兩類函數的媒介, 我們把它包含在凸函數之內,同時也包含在凹函數之內.

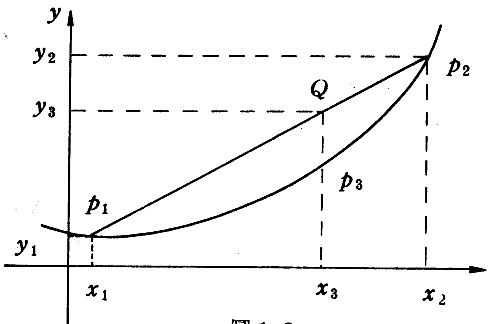


圖 1.2

從圖 1.2 我們不難看出凸函數有這樣的性質.

定義1.1 一個函數 $y=f(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 區間稱之爲凸函數, 如果對任何 $y=f(x)$ 上兩點 P_1 與 P_2, 聯接 P_1 與 P_2 的直線都高于在 P_1 與 P_2 間的曲線 $y=f(x)$. 換言之,對任何 $0\leqslant\lambda\leqslant1$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{1}$$

註:在圖1.2中,若令 $x_3=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$,則(1)表示

$$f(x_3)\leqslant\lambda y_1+(1-\lambda)y_2=y_3,$$

即 Q 點高于 P 點.

同理我們定義 $f(x)$, $x\in(a,b)$ 爲一凹函數如果對所有的 x_1, $x_2\in(a,b)$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 而言:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{2}$$

都成立.

例 1.1 證明 $f(x)=x^2$ 在 $x\in R$ 上爲一凸函數.

證 根據(1)式,我們需要證明對任何 x_1, $x_2\in R$ 及 $0\leqslant\lambda\leqslant1$

$$(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)^2\leqslant\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2. \tag{3}$$

展開簡化(3)之後可知(3)與 $\lambda(1-\lambda)(x_1+x_2)^2\geqslant0$ 相同. 故(3)式顯然成立,即 $f(x)=x^2$ 爲一凸函數.

有時候要證明(1)並不容易,下面的定理可以簡化許多凸函數的證明.

定理1.1 若 $y=f(x)$, $x\in(a,b)$ 滿足下列的二個條件

(i) 對任何 (a,b) 之間的三點 x_1, x_2, x_3, 若 $x_1<x_2<x_3$, 則 $f(x_2)$ 不可能同時大於 $f(x_1)$ 及 $f(x_3)$, 並

(ii) 對任何 x_1, $x_2\in(a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

則 $f(x)$ 爲一凸函數．

這個定理從圖形上很容易看出來，但要證明它必須用到連續的觀念，我們把它的證明從略．

定理 1.1 的 (i) 往往很容易證明，如果一個函數是漸增，如 $f(x)=x^3$，$x\in(0,\infty)$；漸減，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,\infty)$，或先漸減而後漸增，如 $f(x)=x^2$，$x\in(-\infty,\infty)$，(i) 都成立．只是條件 (ii) 往往要費比較多的工夫去證明．

我們若要證明一個函數爲凹函數，我們只要證明這個函數的負值是凸函數就可以了．

定理1.2 若 $f(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 區間爲一凹函數，則 $y=-f(x)$ 在同一區間爲一凸函數，反之亦然．

證 本定理從凹凸函數的公式(1)與(2)很顯然地成立．

例 1.2 試證 $f(x)=\sin x$，$x\in(0,\pi)$ 爲一凹函數．

證 若 $x_1, x_2\in(0,\pi)$，則 $-\pi<x_1-x_2<\pi$，$0<\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}<1$，故

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\leqslant\sin\frac{x_1+x_2}{2} \tag{4}$$

又因 $\sin x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 只有在 $x=\pi/2$ 時取極大值，故 $f(x)=-\sin x$，滿足定理 1.1 之(i)，又(4)乘負號之後滿足定理 1.1 之(ii)，故 $-\sin x$ 爲一凸函數，即 $f(x)=\sin x$ 爲一凹函數．

因凸凹函數有一個這樣簡單的關係，我們若知道凸，凹函數中一種的性質，必定也知道另一種了．在本書中我們將只討論凸函數．．

§6.2 蕭爾 (Schur) 定理

在前面幾章裏我們看到一般不等式的證法都各有巧妙，似乎無一個規則可尋．蕭爾（Schur）在 1923 年發現了一個新的角度去看不等式，一下子歸納了並簡化了許多不等式的證明，要瞭解他的貢獻，我們必須下一點工夫去熟悉一個新的觀念．

我們知道如果一個不等式只包括一個變數，則其證法就相當容易．例如說 $f(x)$ 是一個漸增的函數，則 $x>y$ 就產生 $f(x)>f(y)$．譬如說

$$\sin\frac{\theta}{2}\leqslant\sin\theta \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2}\;; \qquad 3\log 3\geqslant 2\log 2$$

但一般我們想求證的不等式往往包含一個數列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$．蕭爾想到了一個比較兩數列"大，小"的方法，使得許多不等式的證明就像證明 $x\leqslant y$ 則 $f(x)\leqslant f(y)$ 一樣的容易．

在本章裏我們用大寫的 X, Y, Z，等表示數列，而小寫的 x, y, z 表示數列裏的元素，即

$$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$
$$Z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

定義2.1 如果 $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$ 是一個 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的重組且 $x_{(1)}\geqslant x_{(2)}\geqslant\cdots\geqslant x_{(n)}$，則 $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$ 定義爲實數列 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一個漸減重組，

例如 $(1,-2,4,3,6,3)$ 的漸減重組是 $(6,4,3,3,1,-2)$．

下面是蕭爾氏比較兩數列的方法．

定義2.2 $(Y \prec X)$

令 $x_{(1)} \geqslant x_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant x_{(n)}$，$y_{(1)} \geqslant y_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant y_{(n)}$ 分別表示兩實數列 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的漸減重組，若

$$y_{(1)} \leqslant x_{(1)}$$
$$y_{(1)}+y_{(2)} \leqslant x_{(1)}+x_{(2)}$$
$$\vdots$$
$$y_{(1)}+y_{(2)}+\cdots+y_{(n-1)} \leqslant x_{(1)}+\cdots+x_{(n-1)}$$
$$y_{(1)}+y_{(2)}+\cdots+y_{(n)}=\sum_{i=1}^{n} y_i=\sum_{i=1}^{n} x_i=x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(n)}.$$

則我們定義 X 可以**罩得住** Y，並以 $Y \prec X$ 表示之．

例如 $X=(1, 2, 3)$，$Y=(2.5, 1.2, 2.3)$ 兩數列，因

$$3>2.5$$
$$3+2>2.5+2.3$$
$$3+2+1=2.5+2.3+1.2$$

我們即說 X 可以罩得住 Y，亦得 $Y \prec X$．

例 2.1 令 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 爲一實數列且定 $\bar{x}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$，及 $Y=(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$ 爲一含 n 個 $\bar{x}$ 的數列，則 $Y \prec X$．

證 很顯然 $\Sigma x_i=\Sigma y_i=n\bar{x}$. 令 $x_{(1)} \geqslant x_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant x_{(n)}$．爲 X 的漸減重組．則

$$x_{(1)}=\frac{1}{n}(x_{(1)}+\cdots+x_{(1)}) \geqslant \frac{1}{n}[x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(n)}]=\bar{x}$$

$$x_{(1)}+x_{(2)}=\frac{1}{n}[x_{(1)}+x_{(2)}+x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(1)}+x_{(2)}]$$

$$\geqslant \frac{1}{n}(x_{(1)}+x_{(2)}+x_{(1)}+x_{(2)}+2x_{(3)}+\cdots+2x_{(n)})$$
$$=2\bar{x}$$
$$\vdots$$

一般而言

$$x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(k)}$$
$$=\frac{1}{n}[k(x_{(1)}+\cdots+x_{(k)})+(n-k)(x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(k)})]$$
$$\geqslant \frac{1}{n}[k(x_{(1)}+\cdots+x_{(k)})+k(x_{(k+1)}+\cdots+x_{(n)})]=k\bar{x}$$

故 $Y \prec X$．

下面這個定理把罩得住的觀念與凸函數的關係做了一個引線．

定理2.1 令 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 爲兩實數列，且 X 與 Y 只有兩個元素不相同，設其位置在 i 與 j 上．（即 $x_k=y_k$ 除非 $k=i$ 或 j）．則下列(i)與(ii)互爲充要條件．

(i) $X \prec Y$

(ii) 有一個數 $0<\lambda<1$，且

$$y_i=\lambda x_i+(1-\lambda)x_j$$
$$y_j=(1-\lambda)x_i+\lambda x_j$$

證 因 i 與 j 可在任何位置，因此我們不妨假設 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_i \geqslant \cdots \geqslant x_j \geqslant \cdots \geqslant x_n$．我們先由(i)去推出(ii)．

因除了在 i，j 位置上的 x，y 皆相等又 $Y \prec X$，則必須有

$$x_i>y_i \qquad x_i+x_j=y_i+y_j$$

亦即 $x_i>y_i \geqslant y_j>x_j$．若令

$$\lambda=\frac{y_i-x_i}{x_i-x_j}$$

則 $1>\lambda>0$ 並很容易代入而證得(ii)．

現若(ii)成立，則由於在 i 之前 x，y 皆相等，故對 $k<i$ 而言，

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=y_1+y_2+\cdots+y_k$$

又在 $k=i$ 時

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_i &= x_1+\cdots+x_{i-1}+\lambda x_i+(1-\lambda)x_j \\ &\leqslant x_1+\cdots+x_{i-1}+\lambda x_i+(1-\lambda)x_i \\ &= x_1+x_2+\cdots+x_i \end{aligned}$$

這種不等的情形一直到 $k\geqslant j$ 時又恢復了等式（因爲 $y_i+y_j=x_i+x_j$）故本定理成立．

定理2.2 令實數列 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 且 X 與 Y 不全相同並 $Y\prec X$．則我們可找到一個數列 $Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 具備下面三個性質。

(i) $Y\prec Z\prec X$（即 $Y\prec Z$ 且 $Z\prec X$）

(ii) Z 與 Y 比 X 與 Y 至少多一個相同的元素

(iii) Z 與 X 最多只有兩個元素不同．

證 因本定理之證明與 X，Y 之排列法無關，不妨假定 X，Y 已成漸減排列，即 $X: x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$Y: y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$

因 $Y\prec X$，故 $\Sigma x_i=\Sigma y_i$．又因 x_i 與 y_i 不全相同，必有一個 k 使得 $x_k>y_k$，及一個 l $x_l<y_l$．取 i 爲最大的 k 有 $x_k>y_k$ 的性質，j 爲最小的 $l>i$ 並 $x_l<y_l$ 的性質．則 X，Y 與 i，j 的關係必如下圖．

$$X: x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{i-1}\geqslant x_i\geqslant \underbrace{x_{i+1}\geqslant\cdots\geqslant x_{j-1}}\geqslant x_j\geqslant x_{j+1}\geqslant\cdots\geqslant x_n$$

$$\vee \qquad \text{各個相等} \qquad \wedge$$

$$Y: y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_{i-1}\geqslant y_i\geqslant \overbrace{y_{i+1}\geqslant\cdots\geqslant y_{j-1}}\geqslant y_j\geqslant y_{j+1}\geqslant\cdots\geqslant y_n$$

即當 $k=i+1$，$i+2$，$\cdots$，$j-1$ 時 $y_k=x_k$（否則 i 應向右移或 j 向左移）．令

$$\delta=\min(x_i-y_i,\ y_j-x_j)$$

$$\lambda=\frac{\delta}{x_i-x_j}$$

由於 $x_i>y_i\geqslant y_j>x_j$，可知 $0<\lambda<1$．令 z_k 與 x_k 除 $k=i$，j 時皆相同，

$$z_i=x_i-\delta,\quad z_j=x_j+\delta$$

由 λ 之定義可得

$$\begin{aligned} z_i &= x_i-\delta=x_i-\lambda(x_i-x_j)=(1-\lambda)x_i+\lambda x_j \\ z_j &= x_j+\delta=\lambda x_i+(1-\lambda)x_j \end{aligned}$$

由定理 2.1 得知 $Z\prec X$．因 Z 與 X 除 i，j 位置上之元素皆相同，又因 δ 只可能等於 x_i-y_i 或 y_j-x_j，故很容易求出

$$\sum_{t=1}^{k} z_t\geqslant\sum_{t=1}^{k} y_t \qquad k=1,2,\cdots,n-1$$

及

$$\sum_{t=1}^{n} z_t=\sum_{t=1}^{n} x_t=\sum_{t=1}^{n} y_t$$

故 $Y\prec Z$．即(i)得證．根據 δ 之定義，若 $\delta=x_i-y_i$，則 $z_i=y_i$，若 $\delta=y_j-x_j$ 則 $z_j=y_j$ 故(ii)成立．因 X 與 Z 除 i，j 位置均相同．(iii)亦證得．

系 在本定理中，我們可以找到 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_s$（$s\leqslant n$）個數列使得

(i) $Y=Z_0\prec Z_1\prec Z_2\prec\cdots\prec Z_s\prec Z_{s+1}=X$，

(ii) 所有 Z_i 與 Z_{i+1} 之間（$i=0,1,2,\cdots,s$）只有兩個不同的元素．

證 因X與Y最多只有n個不同的元素，由定理(ii)知$s \leqslant n$．

現在我們可以證明本章的主要定理了．

定理2.3 （蕭爾定理）設$f(x)$在某給定之〔a，b〕區間，爲一凸函數，又$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$兩數列元素全在〔$a$，$b$〕區間內，若$Y \prec X$，則

$$\sum_{k=1}^{n} f(y_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{1}$$

證 由定理2.2的系我們只需證明Y與X只有兩個元素不相同的情形就行了．（否則我們可由$Z_1, Z_2, \cdots, Z_s$一直推下去）．令x_i，x_j與y_i，y_j不相同而其餘全相同，則(1)變成了

$$f(y_i)+f(y_j) \leqslant f(x_i)+f(x_j) \tag{2}$$

因$Y \prec X$，由定理2.1知道我們可以找到一個$0<\lambda<1$，且

$$y_i=\lambda x_i+(1-\lambda)x_j$$

$$y_j=(1-\lambda)x_i+\lambda x_j$$

由$f(x)$之凸性質得

$$\begin{aligned} & f(y_i)+f(y_j) \\ &= f(\lambda x_i+(1-\lambda)x_j)+f((1-\lambda)x_i+\lambda x_j) \\ &\leqslant \lambda f(x_i)+(1-\lambda)f(x_j)+(1-\lambda)f(x_i)+\lambda f(x_j) \\ &= f(x_i)+f(x_j) \end{aligned}$$

故(2)得證．

現在我們將看定理2.3有什麼用處．

例2.2 因$f(x)=\log x$，$0<x<\infty$是凹函數（本章習題1），則$g(x)=-f(x)$在$x \in (0, \infty)$爲一凸函數．由例2.1知$(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}) \prec (x_1, x_2, \cdots, x_n)$故由定理2.3可得

$$\sum_{i=1}^{n}(-\log \bar{x}) \leqslant -\sum_{i=1}^{n}\log x_i \quad (x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n)$$

亦即

$$\bar{x} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

這就是幾何與算術平均數的不等式．

例2.3 因$f(x)=1/x$爲一凸函數（本章習題1）則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\bar{x}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \qquad x_i>0$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geqslant \frac{n}{\bar{x}}$$

例2.4 有n個數$0 \leqslant x_i<1$且$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，試證

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i} \geqslant \frac{n}{1-n}$$

證 我們先證$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，在$0<x<1$之間爲凸函數．經過通分簡化可知

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

即
$$\frac{(x_1+x_2)/2}{1-(x_1+x_2)/2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}\right)$$

與$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \geqslant 0$相同，既證得$f(x)$爲凸函數，又因$\bar{x}=\dfrac{1}{n}$，故$\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, \cdots, \dfrac{1}{n}\right) \prec (x_1, x_2, \cdots, x_n)$由定理2.3

可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} \geqslant n \cdot \frac{1/n}{1-(1/n)} = \frac{n}{1-n} .$$

例 2.5 設 x_i，$i=1,2,\cdots,n$ 為 n 個實數，a 為一定數．令 $\bar{x}=\Sigma x_i/n$，試證

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i-a| \geqslant n|\bar{x}-a|$$

證 很顯然，由於 $f(x)=|x-a|$ 是凸函數及 $(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x}) \prec (x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

例 2.6 由例 1.2 知 $\sin x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 之間為凹函數，又在一三角形中，若以 A,B,C 表示其三頂角，則很容易求得

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (A,B,C) \prec (\pi,0,0)$$

故 $0 \leqslant \sin A+\sin B+\sin C \leqslant 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

又 $1 \leqslant \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leqslant 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$.

例 2.7 令 $f(x)=\log\sin x$，$0<x<\pi$．則 $f(x)$ 的凹函數性可

由 $\sin x_1 \sin x_2 \leqslant \sin^2\frac{x_1+x_2}{2}$

即 $\cos(x_1-x_2) \leqslant 1$

證得．由於 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (A,B,C)$，可證得

$$\log\sin A+\log\sin B+\log\sin C \leqslant \log\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$$

即 $\sin A\sin B\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

蕭爾定理的用途可以推廣到很多超出本書範圍的不等式，一本很好的參考書是Marshall 與Olkin 所著“Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications”1979 美國Academic Press 出版．

第六章 習 題

1．試鑑別下列各函數之凸凹性，

(i) $f(x)=x$, $-\infty<x<\infty$.

(ii) $f(x)=|x-a|$, $-\infty<x<\infty$.

(iii) $f(x)=1/x$, $0<x<\infty$.

(iv) $f(x)=\log x$, $-0<x<\infty$.

2．設 a,b,c 為三正數，令 $x=b+c-a$，$y=c+a-b$，$z=a+b-c$．求證

$$abc(xy+yz+zx) \geqslant xyz(bc+ca+ab)$$

3．設 $0<x_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$．試證

(i) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1+x_i}{1-x_i}\right) \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

(ii) $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geqslant (n+1)^n$

(iii) $\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \geqslant (n-1)^n$

〔註:(i)在 1975 年被Klamkin 發現,(ii)與(iii)在1970 年發現〕

4. 令 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 爲二組實數列令 $x_{(1)} \geqslant x_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant x_{(n)}$,$y_{(1)} \geqslant y_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant y_{(n)}$ 分別表示它們的漸減重組.試證

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{(n)} - y_{(n-i+1)}|$$

5 試證一定圓內接 n 邊形中,以正 n 邊形的面積最大.

6. 設 $x_i > 0$,$i = 1, 2, \cdots, n$,令

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

$$y_n = \frac{x_n + x_1}{2}$$

試證 $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n \geqslant x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$(此不等式在 1969 被Daykin 所發現.)

7. 設 a, b, c 與 a', b', c' 爲同周長兩三角形之三邊.若 a', b', c' 均介於 $\min(a, b, c)$ 與 $\max(a, b, c)$ 之間.試證 a', b', c' 所圍成面積比 a, b, c 所圍成的面積要大.

8. 試證在一銳角三角形 ABC 中

(i) $\sqrt{2} \leqslant \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}$

(ii) $1 \leqslant \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$

(iii) $\frac{1}{2} \leqslant \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(iv) $2 \leqslant \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

在下面幾題(9-12)中,A, B, C 表一三角形之三角,a, b, c 表其對邊長,s 表示半周長,△表面積,令 r 表內切圓半徑,r_a, r_b, r_c 表傍切圓之半徑,及 h_a, h_b, h_c 表三邊上的高.

9. 試證

(i) $abc \leqslant \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

(ii) $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geqslant \frac{9}{s}$

(iii) $abc \geqslant 8(s-a)(s-b)(s-c)$

10. 試證

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leqslant r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a$$

(註:此不等式在 1966 年被Nasser 所發現)

11. 試證 $\sqrt{s} \leqslant \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leqslant \sqrt{3s}$

12. 試證

(i) $h_a h_b h_c \geqslant 27 r^3$

(ii) $h_a + h_b + h_c \leqslant 9r$

(iii) $\frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geqslant \frac{3}{r}$

(1966 Bokov 發現)

(iv) $\frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r} \geqslant 6$

(1965 Cosnita 與 Turtoiu 發現)