第八章　變　分　學

8-1　變分學中的幾個著名問題

想要瞭解變分學的內容，我們先來研究它裏面的幾個著名問題。

1. 最速下降曲線（Brachistochrone）

在鉛直面上聯結不同在一鉛直或水平線上的二定點M_1，M_2，架設一座光滑的橋樑，將一個物體放在橋樑上端，讓它由重力作用，自行沿著橋樑，滑落下去。求這座橋樑的形式，要是如何曲線？纔能使所放物體，在最短時間內，降落到下端。

這個問題，是西曆一千六百九十六年，瑞士數學家伯爾奴衣・約翰（Johann Bernoulli），向他的長兄伯爾奴衣・耶可卜（Jakop Bernoulli），以及世界上所有數學家，挑戰而提出的，實爲變分學研究的開端。因爲問題內容新穎，引起當時數學家極大興趣，解出的人，除伯爾奴衣兄弟二人外，還有微積分學的發明人牛頓（Newton）與萊卜尼玆（Leibniz），和在微積分學中鼎鼎有名的洛必達（ℓ'Hospital）等。

取鉛直面上二定點中較高的一點M_1爲原點，通過該點的水平線爲x軸，鉛直線爲y軸；規定x軸以右端爲正，y軸以下端爲正時，那麼，二定點的坐標，便是$M_1(0, 0)$，$M_2(x_1, y_1)$。設二定點間所架橋樑的形式爲曲線

$$y=y(x),\quad 0\leq x\leq x_1,\qquad (1)$$

在此$f(x)$爲一連續可微分函數

因此曲線須通過M_1，M_2二定點，所

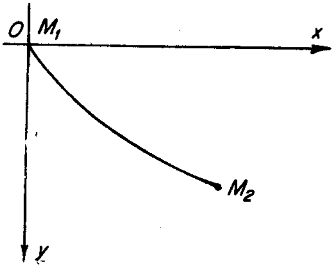

圖 8-1

以非要

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{2}$$

不可。因爲落體落下 y 距離所獲得的速度 v 爲$\sqrt{2gy}$（g 爲由重力所生的加速度），而速度又等於運動體所經過路程對於時間的變率，即，

$$v=\frac{ds}{dt},$$

故得關係式如下：

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

即

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx。$$

隨之得靜止物體由 $y=y(x)$形式的光滑橋樑上端，滑降到下端所需要的時間，是

$$T=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx \tag{3}$$

本題目的，就是在

$$y(0)=y,\quad y(x_1)=y_1$$

的條件下，要決定關於 x 的未定函數 $y=y(x)$ 應當是什麼？纔能使定積分

$$I=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

取極小值。

汎函數的極值與變分學　看了上面所學的三個例題，大家對於變分學中所研究的問題，當然得到了多少印象。但是想要對變分學在數學中所佔地位，正確的下一定義，却非要再曉得若干新概念不可。此處必須喚起大家回憶的，就是數學解析中的基本概念—— 函數。函數的依從關係，簡單的可敍述如下：設M為某一實數集合，對於M集合中任何一數x，皆有一數y與之對應，則在M集合上，必有一函數$y=f(x)$存在。這個集合M，就叫做那個函數$y=f(x)$的定義域。

汎函數的概念，當然係由函數的概念，直接而且自然的一般化而來。并且作為特殊情形，可將函數一併包括於汎函數中。

設M為一任何種類物件的集合，這些物件的性質，并無關宏旨，它們可能是數，空間中的點，曲線，函數，機械系統的狀態甚至於它的運動。為簡單起見，這些物件，我們統通稱它為集合M的元，而以英文字母x表之。

設對於M集合中任何一元x，皆有一數y與之相應，則在M集合上，必有一汎函數$y=F(x)$存在。

設M集合為數x的集合，則此汎函數$y=F(x)$即為一個變數的函數。設M集合為一對數（x_1，x_2）的集合，即為平面上的點集合，則此汎函數為兩個變數的函數$y=F(x_1, x_2)$。餘類推。

關於汎函數$y=F(x)$，可陳述一問題如下：

在M集合的所有各元x中，試找出一個使汎函數$y=F(x)$取最小值的元來。

關於汎函數取極大值的問題，可同樣推得之。

若變更汎函數$F(x)$的符號，作成$-F(x)$汎函數時，則$F(x)$的極大值（極

小值），即成爲$-F(x)$的極小值（極大值），故研究汎函數時，它的極大值與極小值，實無同時研究的必要。本書遵照此旨，主要的皆爲對於汎函數的極小值，加以研究。

在最速下降曲線問題，即一物體沿曲線下降的最短時間問題中，吾人需要研究其取極小值的汎函數，爲定積分(3)。此汎函數在所有可能的函數(1)上，於滿足條件(2)的狀況下，皆能成立。

設所研究問題爲以空間閉曲線爲框的肥皀膜平衡問題，則其汎函數爲肥皀膜變形時，表其位置能力的二重積分(7)。我們必須在滿足境界值條件(8)的狀態下，於函數$u=u(x,y)$ 的集合中，找出一個使二重積分(7)取極小值的二變數函數來。

任何汎函數，皆可由兩個因子來加以定義：一個是由x元組成的集合M，在M上汎函數方纔能夠成立；一個是一數對應於一個元x的法則，這數就是所謂汎函數的值。推求汎函數取極小與極大值的種種方法，實在都寄存於集合M的性質上。

變分學就是汎函數論中的特別一章。在變分學中，我們要作出在函數集合上的汎函數，進而去建立這些汎函數取極值的理論。

這種數學的分科，在發見它與物理學、力學等科學中種種狀態的關聯後，顯得格外重要。其間關聯的理由，可得知如下。後面我們當然要弄得清楚明白，這裏可以先說的，就是那個使汎函數取極值的函數，必須要能滿足某一個一定微分方程式。在另一方面，又如微分方程式章中所說的，力學和物理學中關於量的法則，常可寫成微分方程式的形式。這種微分方程式作成後，其中有許多就是變分學中出現的微分方程式。職是之故，許多力學和物理學中的方程式，可以視作適當的汎函數的極值條件；同時物理學中的定律，也可敍述成某幾種量需要取極值的形式，尤其以取極小值時爲然。因爲某些定律可用「最小原理」述成的同值陳述來代替，所以許多新的觀點，也就可以加以接納。這樣一來，不論正確的也好，或近似的也好，都開啓了我們用推求對應汎函數的極小值，來解決物理學中問題的新方法。

8-2 變分學中的微分方程式

歐依勒爾（Euler）微分方程式　　在微分學中，某微分可能函數$f(x)$在x點上有極值的必要條件，讀者當可憶及，是在該點上，該函數的導函數$f'(x)$必須等於０：$f'(x)=0$；或該函數的微分df在該點上等於　０：df

$=f'(x)dx=0$。

在變分學中，我們的直接目的，也是要找到一個與這個條件類似的條件。換句話說，就是要找出某函數使所與汎函數取極值時，該函數必須滿足的條件。

我們將可證明，這種函數，是需要滿足某一定微分方程式的。這個方程式的形式，隨所與汎函數的種類而異。爲了容易瞭解起見，當然要從變分學中所謂最簡單的積分開始。這個最簡單的積分，就是具有下面定積分形式的汎函數

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx \tag{9}$$

上面這個定積分，它積分符號後面的函數F，計含有x, y, y'三個變數。這個函數F，對於y'的所有各值，假定都是連續而且二次微分可能的；而對於x, y, 則需在Oxy坐標面的領域B上，方能成立。

y爲$x_1\leq x\leq x_2$區間的連續而且微分可能函數

$$y=y(x), \tag{10}$$

而y'爲其導函數，甚明。

用幾何圖形來表示，就如圖三所示，在Oxy坐標面上，$y=y(x)$或許代表一條介於〔x_1, x_2〕區間的曲線l。

定積分(9)是將最速下降曲線問題中所遭遇到的定積分(3)，與最小表面的迴轉體問題中所遭遇到的定積分(6)等，一般化得來的。它的積分值，由函數$y(x)$的選擇不同，即曲線l的選擇不同而異。至於它的極小值問題，則可解釋之如下：

確定由函數(10)所表各函數（即由所有各曲線l）組成的集合M；在這個集合M中，再行找出一個（一條）使定積分$I(y)$取極小值的函數（曲線）來。

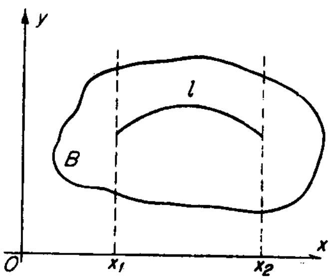

圖 8-3

所以這個函數的集合M，我們必須首先正確的定義出，它裏面的元，都是能使定積分(9)取積分值的函數。在變分學中，這個集合中的函數，一般皆叫作容許比較函數。我們研究變分學問題，如係在固定的境界值條件下，那麼，這個容許函數的集合，就可由下述兩個要

求來加以定義：

1. $y(x)$為〔x_1, x_2〕區間的連續而且微分可能函數；
2. $y(x)$在〔x_1, x_2〕區間的兩端，必須取

$$y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2 \tag{11}$$

值。

除此以外，$y(x)$可以完全任意。這事如用幾何學的語言來敘述，就是：在〔x_1，x_2〕區間，把通過$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$二定點，能由方程式(10)表出的所有各柔和曲線，統通都來加以研究。又這個使定積分取極小值的函數，當然要假定它確實存在，并姑且叫它做$y(x)$。

下面這個簡單而巧妙的論證，能把$y(x)$必須滿足的條件，化成特別的簡單形式，是在變分學中常常使用的。就是它能將定積分(9)取極小值的問題，化成一個函數取極小值的問題。

設α為與x，y，η都無關係的一個常數，今取函數族

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x) \tag{12}$$

來加以研究，為了使$\bar{y}(x)$對於任意常數α都能成為容許函數起見，必須假定$\eta(x)$係一個連續而且微分可能的函數，并在〔x_1，x_2〕區間的兩端都成為0，即

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \tag{13}$$

在定積分(9)中置$\bar{y}$以代y時，這個定積分就變成了媒介數α的函數

$$I(\bar{y})=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\,dx=\Phi(\alpha) \text{ 。}$$

〔$\bar{y}$與y的差$\bar{y}-y=\alpha\eta$，叫做函數η的變分（變化），而以記號δ_y表之。又$I(\bar{y})$與$I(\bar{y})$的差$I(\bar{y})-I(y)$，叫做定積分(9)的全變分。變分學的名稱，即係由此得來。〕

因為$y(x)$使定積分(9)的取極小值，故函數$\Phi(\alpha)$在$\alpha=0$時亦必取極小值，隨之在$\alpha=0$時，它的導函數不可不為0。即

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left[F_y(x, y, y')\eta+F_{y'}(x, y, y')\eta'\right]dx=0 \tag{14}$$

方程式(14)必須要被，在〔x_1，x_2〕區間兩端，都成為0的連續而且微分可能的，任意函數$\eta(x)$所滿足。為了計算出它的結果，可用分部積分法，將方程式(14)中的第二項，變換成

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\eta'\,dx=-\int_{x_1}^{x_2}\eta\,\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx ,$$

而使方程式(14)取

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_y'\right)\eta\,dx=0 \tag{15}$$

新形式。

在如何的條件下，方程式(15)纔能被滿足？想要解決這個問題，又必須先行證明下述的預備定理。

預備定理　　設：1.　$f(x)$為閉區間〔a,b〕的連續函數；

2.　$\eta(x)$為開區間（a,b）的連續而且微分可能的任意函數，

$$\eta(a)=\eta(b)=0\ ;$$

3.

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0$$

時，則必定是$f(x)\equiv 0$。

證明使用矛盾法。就是假定在〔a,b〕區間，有一點c能使函數$f(x)$的值不為0；再確定有一適合於條件的函數$\eta(x)$存在，這個$\eta(x)$函數能使定積分

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx\neq 0\quad ,$$

與定理的假設矛盾，從而推知在〔a,b〕區間，非要$f(x)\equiv 0$不可。

因$f(c)\neq 0$而f為連續函數，故在c點的附近，必有一極小鄰區〔α，β〕存在，在這區間內，函數$f(x)$的值均不為0且保持一定符號。

我們常可作出一個$\eta(x)$函數，使它在〔a,b〕區間為連續而且微分可能函數，在〔α，β〕區間取正值，而在〔α，β〕區間外方皆為0。（圖四）

例如函數

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & \text{在〔}a\text{，}\alpha\text{〕上，}\\ (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 & \text{在〔}\alpha\text{，}\beta\text{〕上，}\\ 0 & \text{在〔}\beta\text{，}b\text{〕上。}\end{cases}$$

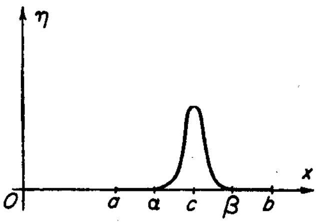

圖 8-4

就能合於上面規定的各條件。

在這種函數$\eta(x)$下，

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)\eta(x)dx\neq 0\ 。$$

因爲在〔α，β〕區間 $f(x)$的值不爲 0 且保持一定符號，而 $\eta(x)$的值常爲正，故 $f(x)\eta(x)$的值亦不爲 0 且保持一定符號，隨之

$$\int_\alpha^\beta f(x)\eta(x)dx \neq 0\ ,$$

且保持一定符號的緣故。

因爲方程式(15)必能被在〔x_1，x_2〕區間兩端成爲 0 的連續而且微分可能的任意函數 $\eta(x)$所滿足，故根據預備定理，它成立時非要

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{16}$$

不可。將 $F_{y'}$關於 x 微分，得

$$F_y(x,y,y') - F_{xy'}(x,y,y') - F_{yy'}(x,y,y')y' - F_{y'y'}(x,y,y')y'' = 0 \tag{17}$$

上式爲關於 y 的二階常微分方程式。這個方程式，一般皆稱之爲歐依勒爾方程式。因得結論於下：

設 $y(x)$爲使定積分 $I(y)$取極小值的函數，則此函數必須滿足歐依勒爾方程式(17)。在變分學中，這種陳述的意義，與微分學中 $df=0$爲函數 f 取極值的必要條件，完全相同。根據這個結論，那些不能滿足歐依勒爾方程式的容許函數，都可立刻把它排擠出去。因爲不能使定積分取極值的函都都已經删去，在容許函數的集合中，需要去研究的，也就尖銳的減少了。

微分方程式(17)的解需要具備的性質，就是在 $\eta(x)$爲任意函數的條件下，它都能使導函數 $\left[\frac{d}{d\alpha}I(y+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}$成爲 0。這種情形，就和微分學中函數的停留點類似，所以微分方程式(17)的解，通常都叫作定積分 $I(y)$的停留值。

因爲我們現在研究的問題，都具有固定的境界值，所以用不著去追求歐依勒爾方程式中的所有解，只需把那在x_1，x_2 點上取y_1，y_2值的找出來，就行了。

現在把我們的注意力，集中到歐依勒爾方程式上來。因爲它係二階常微分方程式，所以解中必須具有兩個積分常數C_1，C_2，

$$y=\varphi(x,C_1,C_2)\ 。$$

這兩個積分常數，可由積分曲線通過兩個定點$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$來加以決定。就是將

$$\varphi(x_1,C_1,C_2)=y_1\ ,$$

$$\varphi(x_2,C_1C_2)=y_2$$

兩方程式聯立解出時，即得。在多數情況中，這一組聯立方程式的解，都只

有一組。所以通過A，B兩定點的積分曲線，也只有一條。

定積分(9)的極值問題，是常常可用微分方程式論中的已知方法，加以解出的。但我們要知道，在微分學中，$f'(x)=0$不過係函數$f(x)$取極值的必要條件，而非充分條件。究之$f'(x)=0$的根是不是能使$f(x)$取極大值，極小值，或並不使其取極值，非要一一加以檢討不可。同樣，歐依勒爾方程式的解，是不是能使定積分(9)取極大值，極小值，或竟不能使它取極值，我們也非要在檢討之後，不能斷言。但是根據問題的性質，必有一個極小值存在；同時微分方程式(17)的解又只有一個時，那麼，這個解能使定積分(9)取極小值，絲毫無疑問。

例題　如前所述，最速下降曲線一問題，結果歸著到找出使定積分

$$I(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

取極小值的函數$y(x)$，而且這個函數并要滿足

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1;$$

二條件。

因此處定積分(9)中的被積分函數$F(x,y,y')$為

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},$$

隨之它的歐依勒爾方程式成為

$$-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\left[y^{-\frac{1}{2}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0。$$

上式實行微分并加以簡化後，成為

$$\frac{2y''}{1+y'^2}=-\frac{1}{y}。$$

以y'乘上式兩邊後積分，得

$$\ln(1+y'^2)=-\ln y+\ln k,$$

即

$$y'^2=\frac{k}{y}-1,$$

$$\sqrt{\frac{y}{k-y}}\,dy=\pm dx。$$

置

$$y=\frac{k}{2}(1-\cos u)，\ dy=\frac{k}{2}\sin u\,du，$$

而代入於上式中，得

$$\frac{k}{2}(1-\cos u)\,du=\pm dx\ 。$$

積分，得

$$x=\pm\frac{k}{2}(u-\sin u)+C\quad 。$$

因此曲線必須通過原點，故$C=0$。隨之得所求橋樑的形式，必須爲擺線

$$x=\frac{k}{2}(u-\sin u)，\ y=\frac{k}{2}(1-\cos u)；$$

物體沿橋樑滑下的時間，方纔最短。上式中的k值，可由擺線再行通過另一點（x_1，y_1），來加以決定。