當$D^+=D_+$時，我們說，函數有“右導數”；當$D^-=D_-$時，我們說，它有左導數。

當右方上、下導數和左方上、下導數都相等時，而且只在此時，我們說，函數在那裡有唯一確定的導數。

當我們按照這種方式弄清楚函數在每一點有導數須滿足幾個條件時，我們必須問，這樣的函數根本存在否。這個問題是極端對立的兩個問題之一，另一個極端來自不假思索的習慣觀點，即每個連續函數都該有導數[1]。

§9 外爾斯特拉斯不可微函數；它的形象概述

在上述一般論述之後，我們轉而詳細地討論這樣一個例：一個連續函數在任何處沒有符合我們定義的導數。

我們選取外爾斯特拉斯的著名函數，他大約在1861年找到這函數，可是直到1874年在P. 杜·布瓦—雷蒙的文章裡才附帶地公開發表(J. f. Math. 第79卷1875)[2]。

註[1]: 在Jean Perrin的著名著作Les Atomes (《原子》) [由A. Lottermoser譯成德文(1914)]裡，有與此相關的提示。他在該書的前言第IX和第X頁中說：“利用顯微鏡觀察布朗運動，看到浮在溶液裡的每個小顆粒來回運動時，我們被實驗的真實完全吸引住了。爲了對它的軌跡作切線，需要作連接軌跡上非常接近的兩點（即該小顆粒在兩個鄰近時刻的位置）的直線，並找出它們的極限位置。可是，在我們研究過程中，兩觀察的時刻間隔無論多小，這直線的方向總是持續地變化著。由這項研究，一個不帶成見的觀察者只能得到函數沒有導數的感覺，而絲毫得不到有切線的曲線的感覺。還可以參閱E. 波雷爾(Borel)在他1912年的講演Les théories moléculaires et les mathématiques (《分子理論及其數學》)中的有趣評述。該講演在他的Introduction géométrique à quelques théories physiques (一些物理理論的幾何導引) (巴黎，1914)中作爲注記VII重印了。

註[2]: 外爾斯特拉斯本人對該函數論述見他的文集第二卷第71～74頁。此外，可以閱讀外爾斯拉斯致P. 杜·布瓦—雷蒙和L. Koenigsberger的非常有趣的信。這兩信在Acta math第39卷(1932)第199～239頁公開發表，在外爾斯特拉斯之前30年，波爾察諾已經構造了無處可微連續函數的例。但直到幾年前才被發現。對此，可以參考G. Kowalewski：Bolzanos Verfahren zur Herstellung einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion (《波爾察諾建立無處可微連續函數的方法》) Leipziger Ber. (math. phys.)卷74 (1923)第315～319頁。關於這裡所談的問題的其它文獻還可以指出K. 克諾普：Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen (《構造無處可微連續函數的一個簡單方法》)，Math. Zechr. 第二卷(1918)第1～26頁和A. Rosenthal (羅森塔爾)：Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen (《關於實變函數的新研究》)。Enzyklopädie der math. W. 第二卷，第1091～1096頁。

外爾斯特拉斯函數是用具形式

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\nu}\cos(a^{\nu}\pi x)$$

的不盡三角級數確定的，其中$b>0$，但是要使級數收斂，它必須<1，而且a和乘積ab還須滿足一些需要進一步給定的條件。

我們首先通過一個數值的例來說明函數的構成。設$b=\frac{1}{2}$，$a=5$，則

$$y=\cos\pi x+\frac{1}{2}\cos 5\pi x+\frac{1}{4}\cos 25\pi x+\frac{1}{8}\cos 125\pi x+\cdots$$

我們先考察部分曲線

$$y_0=\cos\pi x\,,$$

$$y_1=\frac{1}{2}\cos 5\pi x\,,$$

$$y_2=\frac{1}{4}\cos 25\pi x\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

把它們疊起來，就得到曲線y。

曲線$y_0=\cos\pi x$是一條通常的餘弦曲線，半波長是1，第一個正零點位於$x=1/2$。

函數$y_1=\frac{1}{2}\cos 5\pi x$確定一條波狀曲線：它在$+1/2$和$-1/2$之間擺動，第一個正零點位於$x=1/10$，它的半波長是$1/5$。所以波狀曲線$y_1$比$y_0$陡。這裡，部分曲線的陡度用它在一個零點處的斜率絕對值來衡量。這樣，對於y_0，陡度$\left|\frac{dy_0}{dx}\right|_{x=1/2}=\pi$，對於$y_1$，它

增加到$\left|\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1/10}=\frac{5}{2}\pi$。

函數$y_2=\frac{1}{4}\cos 25\pi x$確定一個曲線，它比前一個更陡。第一個正零點位於$x=1/50$，半波長是$1/25$，縱標在$+1/4$到$-1/4$之間擺動，陡度是$25\pi/4$。

在那以下的部分曲線，一個比一個陡，高度一個比一個小，它的幅度按著比值爲$1/2$的幾何序列減小，但波長比幅度減小得快得多，即按著比值爲$1/5$的幾何序列減小，而陡度則增加得非常迅猛，按照比值爲$5/2$的幾何序列增加。由這些觀察，我們指出對下文具有重要意義的一個關鍵結論：*用以擦成最後曲線的單個部分曲線是波狀曲線，它們的幅度逐漸減小，但陡度非常迅猛地增加。*

現在我們離開數值的例，回到原先函數$y=\sum_0^\infty b^v\cos a^v\pi x$. 對於它，我們區別

1. *部分曲線* $y_v=b^v\cos a^v\pi x$，
2. *近似曲線* $Y_m=\sum_0^m b^v\cos a^v\pi x$

(Y_m是前$m+1$條部分曲線之和)。

當$a>1$, $b<1$時，對於部分曲線總有定理：ν增加時，部分曲線的幅度和波長無限制地減小。可是部分曲線是否像我們上面所舉的具體數值的例那樣越來越陡呢?

微商$\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x}$等於$-a^\nu b^\nu\pi\sin a^v\pi x$；因此，在$y_\nu$的一個零點，

$$\left|\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x}\right|=(ab)^\nu\pi.$$

所以，只要$ab>1$，當ν無限制地增大時，儘管部分曲線的高度無限制地減小，它的陡度卻增加。

我們現在略談*近似曲線*。只有當我們弄清楚這樣一條近似曲線如何從前一條得到後，我們才能夠了解，當這個步驟無限制地繼續下去時，所得到的最後曲線的某些形象。

首先有

$$Y_1=\cos\pi x+b\cos a\pi x,$$

因而我們可以想像，把一條較細密的波狀線加到普通的餘弦曲線上，就可以得到近似曲線Y_1。

其次，

$$Y_2=\cos\pi x+b\cos a\pi x+b^2\cos a^2\pi x,$$

因而在這裡，對於前一條曲線加上了一條更細密的波狀線。

如果說，我們在這裡給出近似曲線的有機構成的話[1]，那麼，當我們想要獲得所求極限曲線的整個輪廓時，我們的直觀能力就迅速變弱了，我們寧可滿足於快快地轉入下面那種邏輯分析：

由前一條近似曲線得到後一條的步驟：對前一條近似曲線加上一條幅度更小，而且其波長不成比例地遠為更小的細密曲線，就得後一條。

現在，對於最後曲線，我們能說些什麼呢? 設第m條近似曲線已經作出，令

$$y=\sum_0^\infty b^\nu\cos a^\nu\pi x=Y_m+\sum_{m+1}^\infty b^\nu\cos a^\nu\pi x.$$

在總和$\sum_{m+1}^\infty b^v\cos a^v\pi x$裡，每個被加項都含同一個因式$b^{m+1}$。把它提出來，得

$$y=Y_m+b^{m+1}\sum_0^\infty b^\nu\cos a^{m+1+\nu}\pi x.$$

現在對右方的無盡和作出估計，以得到y的上界和下界，從而得到含外爾斯特拉斯曲線在內的一條帶。

令其中一切餘弦的值爲$+1$，即得一個上界，令它們爲-1，即得一個下界，於是

y的上界：$Y_m+b^{m+1}(1+b+b^2+\cdots)$，

y的下界：$Y_m+b^{m+1}(-1-b-b^2-\cdots)$。

註[1]: 參看圖19，在該圖裡，仍令$b=1/2$, $a=5$。我從Chr. 維納(Wiener)在Journ. f. Math. 90 (1881)，第221~252頁上的文章中採用這個圖和其下的考察，但不採用他對外爾斯特拉斯的結論的錯誤評論。[維納的文章是很有教育意義的，因爲它含有不清楚的說法，而這些說法有時是聯繫著導數概念的。請參考外爾斯特拉斯清晰的答覆(文集第二卷，第228~230頁)]。

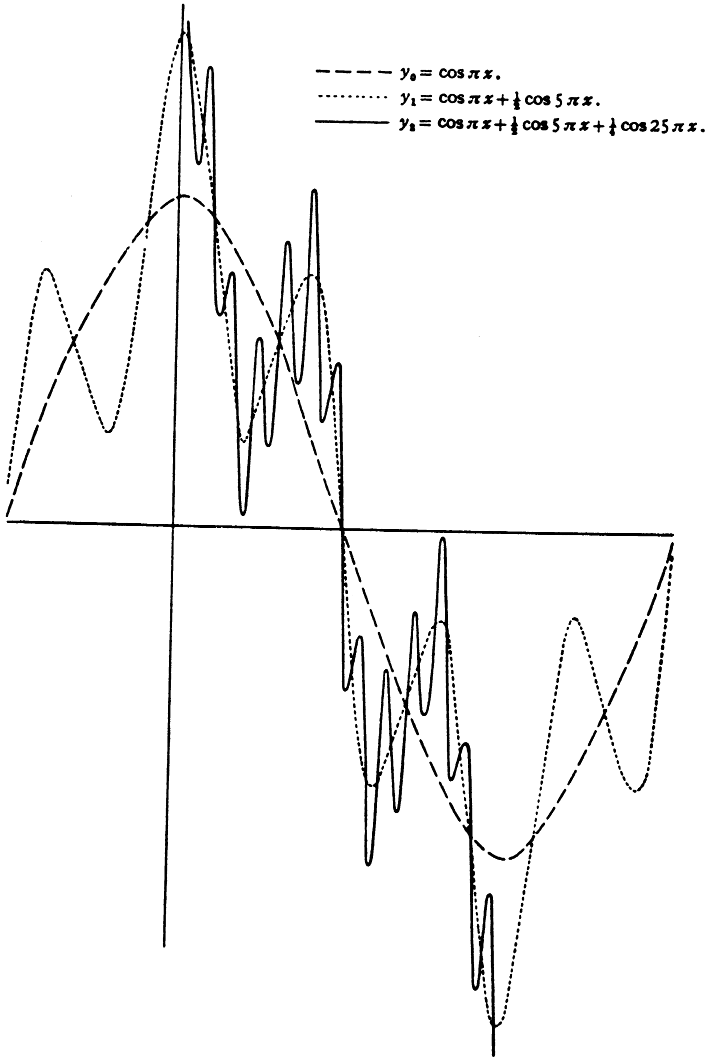

圖 19

外爾斯特拉斯曲線$\sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu \pi x$, $(b = 1/2, a = 5)$的近似曲線

因爲我們已明確假定正數$b < 1$，括弧裡的幾何級數是收斂的。於是得結果$y = Y_m + \varepsilon b^{m+1} \cdot \frac{1}{1-b}$，其中$\varepsilon$是在$+1$與$-1$之間的未知因式；在一切情況下，它包括上下界。用語言表達，就是

最後曲線的縱標可以對下標為m的近似曲線Y_m加上象

$$\varepsilon \cdot \frac{b^{m+1}}{1-b} \ (-1 \le \varepsilon \le 1),$$

形狀的一項來得到。

用較多的幾何語言，也可以說：

最後曲線含在一個寬度為$2 \cdot \frac{b^{m+1}}{1-b}$的帶裡，帶的中線是近似曲線$Y_m$。

例如若$b = 0.1$，用釐米來量，則$m = 6$時，帶的寬度是$2 \cdot \frac{b^{m+1}}{1-b} = 2 \cdot \frac{0.1^7}{0.9} = \frac{2}{9} \cdot 10^{-6}$。這樣的寬度連最精密的顯微鏡都察覺不到。因此，若$b$適當地小，隨著$m$增加，帶寬非常快地減小。總之，按照這樣的方法，就可以推知函數y的連續性。事實上有如下分析：

作爲有盡多個連續函數的和，Y_m是連續的。此外，爲了得到最後曲線而加上的後面那部分，當m充分大時，對一切x，它是一致地小的。但這兩個事實合起來，無非是表明y是連續的。爲了說明這結論，我簡單地把公式寫下來：

設

$$\begin{aligned} y(x) &= Y_m + \varepsilon \frac{b^{m+1}}{1-b}, \\ y(x') &= Y_m{}' + \varepsilon' \frac{b^{m+1}}{1-b}, \end{aligned}$$

則

$$|y(x) - y(x')| = \left| Y_m - Y_m{}' + (\varepsilon - \varepsilon') \frac{b^{m+1}}{1-b} \right|,$$

$$|y(x)-y(x')| \quad \leq \quad \left|\underbrace{Y_m - Y_m{}'}_{\eta_1}\right| + \left|\underbrace{(\varepsilon-\varepsilon')\frac{b^{m+1}}{b-1}}_{\eta_2}\right|,$$

因而$|y(x)-y(x')| \leq \eta_1+\eta_2=\eta$。用語言表達，這就是：

我們先取m如此之大，使得$|(\varepsilon-\varepsilon')\cdot\frac{b^{m+1}}{1-b}| \leq 2\cdot\frac{b^{m+1}}{b-1} < \frac{\eta}{2}$，

然後取x'如此接近x，使$|Y_m - Y_m{}'| \leq \frac{\eta}{2}$；這樣$|y-y'|$也就小於任意已給的正數$\eta$，歸結如下：

由於$b<1$時，隨著m的增加，帶寬變得任意小，另一方面，近似曲線Y_m是連續函數，所以$b<1$時，最後曲線是連續的。

但是，對於最後曲線，我們還可以說得更多一些。在適當選擇a後，首先對於所謂的結和峰[1]可以給出完整的描述。

首先關於結：

當一個角是$\pi/2$的奇數倍時，它的餘弦是零。令$x=(2g+1)/(2a^m)$，其中g是整數。這時$a^m\pi x=(2g+1)\pi/2$，故$\cos a^m\pi x=0$。現在再假設a是奇數，則由於奇數之積還是奇數，$a^{m+1}\pi x$, $a^{m+2}\pi x$, $\cdots$也具有$(2g+1)\pi/2$的形狀，於是得

$$\cos a^{m+1}\pi x=\cos a^{m+2}\pi x=\cdots=0.$$

所以，若g是任意整數，a是奇數，則當$x=(2g+1)/(2a^m)$時，不但第m條部分曲線有零點，在這些地方，最後曲線和第$m-1$條近似曲線以及一切後面的近似曲線都有相同的縱標。於是在最後曲線上有一些點同時在第$m-1$條近似曲線以及一切後面的近似曲線上。這些點我們稱爲*結點*。它們都在經過部分曲線的零點的縱線上。若$2g+1$被a整除，則有關的結點已經在前面一些近似曲線上，但這種情況不需要進一步考察。

由於冪m以及g可以是任意大的整數，又因已經假定$3a>1$，可以看出，經過結點的縱線和x軸的交點在x軸上處處稠密，即在每一個無論多小的子節內總有無盡多個結點[2]。

註[1]: 結和峰依次是Knoten和Scheitel的譯名。—譯者

註[2]: 應說：在x軸上，每個無論多小的子節內總有無盡多個結點的投影。—譯者

稍微複雜一點，但對於外爾斯特拉斯函數的不可微性特別重要的是峰點。這個名稱我們將用於近似曲線以及最後曲線的一些點。所謂近似曲線Y_m的峰點，是指它上面對應於$x=g/a^m$的點，其中g仍然是一個整數，至於最後曲線的峰點，是指它上面一切對應於$x=g/a^m$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$的點。在這些點，第m條部分曲線有極大極小，因爲在那裡：

$$\cos a^m\pi x=\cos\pi g=(-1)^g.$$

由於a是奇數，又有

$$\cos a^{m+1}\pi x=\cos a\pi g=(-1)^g$$

同樣的結論用於一切後面的部分曲線，於是有以下結果：近似曲線上的峰點；因而最後曲線的峰點，位於峰經過部分曲線的極大極小的縱線上[1]。

對於峰點$x=g/a^m$，當$\nu\geq m$時，外爾斯特拉斯級數的第ν項的值是$b^\nu(-1)^g$。

這樣對於一個峰點，就容易給出級數的和。用Y_{m-1}表示第$m-1$條近似曲線在那裡的縱標，就有

$$y=Y_{m-1}+(-1)^g\cdot\frac{b^m}{1-b}\ 。$$

把外爾斯特拉斯曲線的一切峰點投射到x軸上，則由於類似關於結點的原因，這些投影在x軸上處處稠密。於是，到現在爲止，我們的結果是：

當$0<b<1$，a是奇數而且大於1時，外爾斯特拉斯曲線是處處連續的，而且在x軸上有兩個確定的處處稠密的點集。作為連續函數，它的值被它在這兩個點集上的值完全確定。

§ 10 外爾斯特拉斯函數的不可微性

現在，下一個需要系統地考慮的問題是：

在每個x處，微商的四個上、下界D^+, D_+, D^-, D_-的關係如何？我們將發現，在任何點x，這四個導數沒有共同的有窮值或

註[1]: “峰點”，這個詞不完全確切；因爲當g爲奇數時，峰點對應於部分曲線的極低點。—譯者

無窮值，因而在任意x處，我們的函數沒有有窮或無窮的導數。當然，只須證明四個導數中的兩個，例如D^+，D^-有不同的值。

外爾斯特拉斯的證明步驟是綜合性的，沒有對x作進一步的分類。不過要更深入到其中的細節裡去也不難。

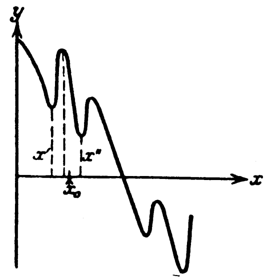

圖20

假定我們要考察導數在x_0的存在性。先考慮第m條近似曲線，在它上面和x_0相鄰的兩個峰中，外爾斯特拉斯選取較靠近的一個，若x_0剛好在兩個峰點間的正中，它選擇左邊的一個(圖20)。設α_m/a^m是這個峰點的橫標，其中α_m當然是一個整數，它就得到不等式

$$-\frac{1}{2}<x_0a^m-\alpha_m\leq+\frac{1}{2}.$$

這樣確定的第m條近似曲線的峰點，本身也有兩個相鄰的峰點。設左邊一個的橫標是x'，右邊一個的橫標是x''。對於x'和x''，確定最後曲線的縱標，並且把這樣得到的兩點x'，y'和x''，y''同所給點x_0，y_0連起來。這樣，我們就有最後曲線的兩個差商。現在要考察的是：當$x'-x_0$和$x''-x_0$都趨於0時，它們是否接近一個共同的有窮或無窮的極限值。我們將看到，當乘積ab充分大時，

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0} \text{ 和 } \frac{y''-y_0}{x''-x_0}$$

或者趨近具有不同符號的無窮的大值，或者它們都在下界$-\infty$和上界$+\infty$之間擺動。這樣，就排除了存在有窮或無窮導數的可能性。

首先考察$x'-x_0$和$x''-x_0$。因為

$$x'=\frac{\alpha_m-1}{a^m} \text{ 和 } x''=\frac{\alpha_m+1}{a^m},$$

我們有

$$\begin{aligned} x'-x_0 &= \frac{\alpha_m-1-x_0a^m}{a^m}=\frac{-1-(x_0a^m-\alpha_m)}{a^m}, \\ x''-x_0 &= \frac{1-(x_0a^m-\alpha_m)}{a^m}, \end{aligned}$$

或者，若按照外爾斯特拉斯的作法，把$x_0a^m-\alpha_m$簡寫成x_{m+1}，則

$$x'-x_0=\frac{-1-x_{m+1}}{a^m},\quad x''-x_0=\frac{1-x_{m+1}}{a^m}.$$

由於$|x_{m+1}|\leq\frac{1}{2}$，又$a>1$，當m增加時，兩個差都趨於零。既然最後曲線的峰點集合對應於x軸上一個處處稠密的點集，這本來是可以立刻得出的。

把y'和y''寫成

$$\begin{aligned} y' &= \sum_0^{m-1} b^\nu\cos a^\nu\pi x'-(-1)^{\alpha_m}b^m\sum_0^\infty b^\nu, \\ y' &= \sum_0^{m-1} b^\nu\cos a^\nu\pi x''-(-1)^{\alpha_m}b^m\sum_0^\infty b^\nu. \end{aligned}$$

這時，若把$y'-y_0$分成兩部分，則差商

$$\begin{aligned} \frac{y'-y_0}{x'-x_0} &= \sum_0^{m-1} b^\nu\frac{\cos a^\nu\pi x'-\cos a^\nu\pi x_0}{x'-x_0} \\ &\quad+\sum_0^\infty b^{m+\nu}(-1)^{\alpha_m+1}\frac{1+\cos a^\nu\pi x_{m+1}}{x'-x_0} \end{aligned}$$

把$y'-y_0$分為兩部分的想法是，把第$m-1$條近似曲線

$$\sum_0^{m-1} b^\nu\cos a^\nu\pi x$$

和“餘曲線”$\sum_0^\infty b^\nu\cos a^\nu\pi x$的差商分開。現在，對兩個差商分別進行估計。

在第$m-1$條近似曲線的差商裡，把分子中的差化為積，就得

$$\begin{aligned} &\sum_0^{m-1} b^\nu\frac{\cos a^\nu\pi x'-\cos a^\nu\pi x_0}{x'-x_0} \\ =&\sum_0^{m-1} b^\nu\frac{2\sin a^\nu\pi\dfrac{x_0+x'}{2}\cdot\sin a^\nu\pi\dfrac{x_0-x'}{2}}{x'-x_0}. \end{aligned}$$

以$a^\nu\pi/2$乘第ν項的分子和分母，就得

$$\sum_0^{m-1} b^\nu \frac{\cos a^\nu\pi x' - \cos a^\nu\pi x_0}{x'-x_0}$$

$$= \sum_0^{m-1} -a^\nu b^\nu\pi \frac{\sin a^\nu\pi\frac{x_0-x'}{2}}{a^\nu\pi\frac{x_0-x'}{2}} \cdot \sin a^\nu\pi\frac{x_0+x'}{2}.$$

由於$\left|\dfrac{\sin a^\nu\pi\frac{x_0-x'}{2}}{a^\nu\pi\frac{x_0-x'}{2}}\right| \leq 1$和$\left|\sin a^\nu\pi\frac{x_0+x'}{2}\right| \leq 1$可知，第$m-1$條近似曲線的差商的絕對值小於或等於$\pi\sum\limits_0^{m-1} a^\nu b^\nu = \pi\dfrac{a^mb^m-1}{ab-1}$而且肯定達不到$\pi\dfrac{a^mb^m}{ab-1}$（已假定$ab$大於1）。因此可以令第$m-1$條近似曲線的差商等於

$$\varepsilon\pi\frac{a^mb^m}{ab-1}\quad(-1<\varepsilon<+1),$$

至於餘曲線的差商，則

$$\sum_0^\infty b^{m+\nu}(-1)^{\alpha_m+1}\frac{1+\cos a^\nu\pi x_{m+1}}{x'-x_0}$$

$$= (-1)^{\alpha_m}a^mb^m\sum_0^\infty b^\nu\frac{1+\cos a^\nu\pi x_{m+1}}{x_{m+1}+1}.$$

這裡面不盡級數第一項是

$$\frac{1+\cos\pi x_{m+1}}{x_{m+1}+1}.$$

由於

$$-\frac{1}{2} < x_{m+1} \leq +\frac{1}{2},$$

$\cos\pi x_{m+1} \geq 0$。分母$x_{m+1}+1$則在1/2和3/2之間擺動。因此

$$\frac{1+\cos\pi x_{m+1}}{x_{m+1}+1} \geq \frac{2}{3}。$$

級數後面各項或正或等於零，所以級數的和也$\geq 2/3$。

設η'為≥ 1的一個正數，並令$(-1)^{\alpha_m}\varepsilon/\eta' = \varepsilon'$（這樣，$\varepsilon'$像$\varepsilon$那樣也在$-1$與$+1$之間），就有

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m}a^mb^m\eta'\left(\frac{2}{3}+\varepsilon'\frac{\pi}{ab-1}\right)。$$

於是得到外爾斯特拉斯函數左方差商的一個估計，類似地，對右方差商有公式

$$\frac{y''-y_0}{x''-x_0} = (-1)^{\alpha_m+1}a^mb^m\eta''\left(\frac{2}{3}+\varepsilon''\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

不過這裡多了一個因數(-1)，因為$x''-x_0$是正的而$x'-x_0$是負的。

我們希望能使差商中餘曲線提供的那部分的絕對值大於第$m-1$條近似曲線提供的那部分的絕對值。通過定性考慮，我們可得結論：

必須使得加到第$m-1$條近似曲線上的那些波狀線儘可能地陡。但陡度與ab有關，因此必須令ab充分地大。

定量地可實現如下：

我們選取不利的款：ε'（以及ε''）等於-1，這時必有$\dfrac{2}{3} > \dfrac{\pi}{ab-1}$，即$ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$。

現在假定這個條件已得到滿足。這時$\eta'\left(\dfrac{2}{3}+\varepsilon'\dfrac{\pi}{ab-1}\right)$肯定是一個依賴於$m$的正數$p_m{}'$。同樣有

$$\eta''\left(\frac{2}{3}+\varepsilon''\frac{\pi}{ab-1}\right) = p_m{}''.$$

於是得

$$\left.\begin{aligned} p_m{}' &= \eta'\cdot\frac{2}{3}+\eta'\cdot\varepsilon'\frac{\pi}{ab-1} \\ p_m{}'' &= \eta''\cdot\frac{2}{3}+\eta''\cdot\varepsilon''\frac{\pi}{ab-1} \end{aligned}\right\} \geq \left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

若令$\dfrac{2}{3}-\dfrac{\pi}{ab-1} = q$，則

$$\left.\begin{array}{l} p_m' \\ p_m'' \end{array}\right\} \geq q,$$

其中q的值與m無關。

於是關於差商，有以下兩關係之一：

$$1.\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y'-y_0}{x'-x_0} \geq (-1)^{\alpha_m} a^m b^m q, \\[2ex] \dfrac{y''-y_0}{x''-x_0} \leq (-1)^{\alpha_m+1} a^m b^m q, \end{array}\right.$$

$$\text{或}\quad 2.\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y'-y_0}{x'-x_0} \leq (-1)^{\alpha_m} a^m b^m q, \\[2ex] \dfrac{y''-y_0}{x''-x_0} \geq (-1)^{\alpha_m+1} a^m b^m q, \end{array}\right.$$

依次照$(-1)^{\alpha_m} = +1$或$(-1)^{\alpha_m} = -1$而定。

這些就是外爾斯特拉斯證明導數不存在性所依據的最後公式。證明的具體步驟如下：在差商中，令m越來越大，使x'從左方，x''從右方無限制地接近x_0，若假定有窮導數存在，則兩個差商都必須無限制地趨近同一個有窮數。若假定無窮導數存在，則當$|x'-x_0|$和$|x''-x_0|$充分小時，兩個差商最後保持以相同符號向無窮大增長。但令m加大時，從兩個差商的最後公式可知，要區別三款：

1. 一切α_m（除有盡多個外）是偶數；這時

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0}\text{ 趨於 }+\infty,\quad \frac{y''-y_0}{x''-x_0}\text{ 趨於 }-\infty。$$

2. 一切α_m（除有盡多個外）是奇數；這時

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0}\text{ 趨於 }-\infty,\quad \frac{y''-y_0}{x''-x_0}\text{ 趨於 }+\infty。$$

3. 若既非第1款又非第2款，則可以假設，當m增大時，$(-1)^{\alpha_m}$有交錯符號，無損於普遍性。但這時$\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}$和$\dfrac{y''-y_0}{x''-x_0}$分別都是在以$-\infty$為最大下界，以$+\infty$為最小上界之間擺動。所以在任何一款，外爾斯特拉斯函數在x_0都沒有有窮或無窮導數，而x_0則完全是任意的。

我們用一個圖來說明問題的實質。取第m條近似曲線上一個下峰[1]（α_m為奇數）所對應的x_0（圖21），它也是後面的一切近似曲線的下峰。這是因為一切$\alpha_{m+\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$都是奇數。於是當m增長時，它和相鄰的峰點的高度差必然縮小，它們和x_0的水平距離也縮小，但由於ab選擇得那麼大，高度差縮小的速度比水平距離縮小得慢得多。其結果是，當m增長時，對應於差商的兩條弦無限制地變得更陡，因而它們的斜率以相反符號變得無窮大。上面是假設了第m條部分曲線的一個下峰同時是第$m+1$條，第$m+2$條，$\cdots$部分曲線的下峰。若$\alpha_{m+\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$是偶數，x_0當然對應於有關部分曲線的上峰，而和它相鄰的峰則是下峰，於是圖形倒過來了，但假定導數存在仍然引出矛盾[2]。

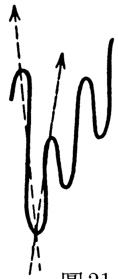

圖21

§ 11 "合理"函數

關於外爾斯特拉斯函數的討論表明，假定了函數連續還不能保證導數存在。若要求連續函數有一階，二階以及更高階導數，就必須把這些條件明確地提出。

回顧本章的論述，有如下內容：我們從經驗曲線自然地看到某些性質

1. 連續性；

2. 在一個有窮節內有一個最大值和一個最小值，以及有盡多個極大值和極小值；

3. 存在著方向。

註[1]：下峰即極小點，稱為"倒峰"可能更恰當。—譯者

註[2]：讀者會猜測，對於外爾斯特拉斯函數的不可微性，條件$ab > 1$已經夠了，它可以取代所採用的更強的條件$ab > 1 + 3\pi/2$，而且條件"a是奇數"與問題的本質無涉。實際上，G. H. 哈代(Transactions of the American Mathematical Society, 第17卷(1916)，第301~325頁)已證明了，如果把不可微性理解為不存在有窮導數，則條件$0 < b < 1$，$ab \geq 1$就夠了。若不限於有窮導數，要保證不可微性，上述條件就不夠了。—這個事實，外爾斯特拉斯是知道的。從第46頁所提到的他給L. Koenigsberger的信中可以看出。我們上面在$0 < b < 1$外，還要求a是奇數，$ab > 1 + 3\pi/2$。這也有優點，可以使用初等方法來論證。