臺灣大學數學系

八十九學年度大學推薦甄試數學學科試題

1.

設 α, β爲 $x^2+\sqrt{10}x+2=0$的兩根，求 $|\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}|$之值。(15分)

2.

a.

設$L_1: x+y=0$，以L_1爲對稱軸，求點$P(a,b)$的對稱點Q的座標。(5分)

b.

設$L_2: x+y=1$，以L_2爲對稱軸，求點$P(a,b)$的對稱點R的座標。(5分)

c.

設 $\Gamma: y=x^2+2$，以L_2爲對稱軸，試求拋物線Γ的對稱圖形的方程式。(8分)

3.

設G爲三角形ΔABC的重心，過G作任意直線與線段 $\bar{AB}, \bar{AC}$分別交於P, Q且

$P \neq A, Q \neq A$。試證 $\frac{\bar{AB}}{\bar{AP}}+\frac{\bar{AC}}{\bar{AQ}}$爲定值。(15分)

4.

令 $f(x)=-x(x-1)(x+1)$。一質點在x軸上運動， 在t時刻的位置是$x(t)$，已知該質點的速度 $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$滿足 $v=f(x)$，即$v(t)=f(x(t))$。

a.

當$x(0)>1$時， $\lim_{t\to\infty} x(t)=$？(3分)

b.

當$0<x(0)<1$時， $\lim_{t\to\infty} x(t)=$？(3分)

c.

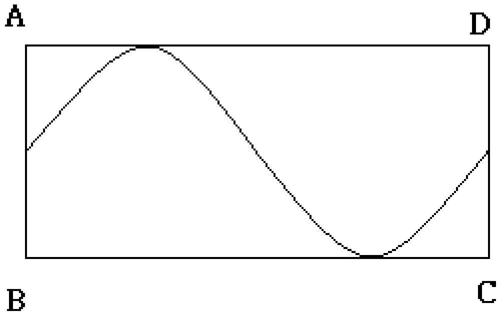
當$-1<x(0)<0$時， $\lim_{t\to\infty} x(t)=$？(3分)

d.

當$x(0)<-1$時， $\lim_{t\to\infty} x(t)=$？(3分)

5.

如圖，$ABCD$爲長方形紙張， $\bar{AD}=2\pi, \bar{AB}=2,$ 其上繪有一條正弦曲線，將紙張由左向右捲起，捲成半徑爲一的圓柱並讓 A, B點分別與D, C點疊和。



a.

紙捲上的曲線是否在一平面上？(7分)

b.

紙捲上的曲線是否爲一橢圓？如果是，長軸短軸各爲多少？(8分)

6.

袋中起初有3個紅球，2個白球。每次從袋中取出一球後，將此球以及與它 同色的5個球(共六個球)一齊放回袋中。

a.

試問第二次取出白球的機率爲多少？(5分)

b.

試問第三次取出白球的機率爲多少？(5分)

c.

由前兩小題的答案猜猜第n次取出白球的機率爲多少？並請證明 你(妳)的猜想。(10分)

d.

若取出白球得5分，取出紅球得8分，則連續取球5次，總得分之期望值 爲若干？(5分)

*****面試試題A*****

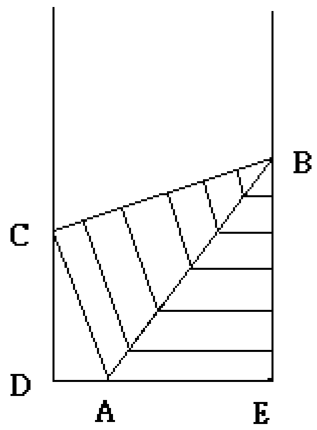
題目A：設數列定義如下：

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{when} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

試證對任意自然數n恆有 $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$。

*****面試試題B*****

題目B:如圖所示，有一寬爲a之長紙條，自底端$\bar{DE}$上任取一點A， 以$\bar{AB}$爲摺痕把AEB這一角摺起來， 使E點合到紙條左邊的C點。當然B, C兩點隨A點變動而變動。 問A要如何才可使$\bar{AB}$最短。


B
C
D
A
E