臺灣大學數學系

八十八學年度大學推薦甄試數學學科試題

1.

a.

設x爲實數，則x在什麼範圍時下式成立？請說明之。(5分)

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

b.

設x爲實數，則x在什麼範圍時下式成立？請說明之。(5分)

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

c.

設z爲複數，則z在什麼範圍時下式成立？請說明之。(5分)

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\frac{1}{1-z}$$

2.

假設$y\geq x\geq 0$，請畫出 $\sqrt{y-x}+\sqrt{y+x}=1$的圖形， 它是你所熟悉之曲線的一部份。該曲線叫什麼？(10分)

3.

設正整數 $n_1,n_2,\cdots,n_s$滿足 $n_1<n_2<\cdots<n_s$.

a.

試證：當n_s爲質數時， $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_s}$不可能爲正整數。(10分)

b.

當$s=3$且n_3不爲質數時，請舉一個 $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}$爲正整數的例子。(5分)

4.

a.

令 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2n|$ ，其中n爲固定的正整數而自變數x爲實數。問$f(x)$的最小値爲多少？ 發生於x爲哪些値時？(10分)

b.

令

$g(x)=||x-1|-|x-2|+|x-3|-|x-4|+\cdots+|x-2n+1|-|x-2n||$

， 其中n爲固定的正整數而自變數x爲實數。問$g(x)$的最小值爲多少？ 發生於x爲哪些值時？(10分)

5.

令 $0<x<\frac{\pi}{2}$

a.

說明$0<\sin x<x$。(5分)

b.

令 $f_1(x)=\sin(x)$，且 $f_{n+1}(x)=\sin(f_n(x)),\quad n=1,2,3,\cdots$。 請說明 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$收斂。(5分)

c.

求 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$之值，請說明之。(5分)

6.

令S表單位球$x^2+y^2+Z^2=1$。若P,Q爲球面S上兩點， $d(P,Q)$表在球面S上，由P到Q沿大圓之劣弧走的距離。 (註：所謂大圓，指的是過球心之平面與球面的交線； 又圓上兩點若將一圓截成兩段圓弧，較短的弧叫劣弧)

a.

令 $P=\frac{1}{4}(=\sqrt{2},-\sqrt{2},2\sqrt{3}),Q=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1,\sqrt{2}+\sqrt{6})$則 $d(P,Q)=$？(5分)

b.

令P爲S上任一點， $C=\{P'|P'\in S,d(P,P')=1\}$。 求曲線$C$的長度。(10分)

c.

令P,Q爲球面S上任意兩點，E爲過P,Q兩點之任一平面， 平面E與球面S相交得一圓D。 令$d_E(P,Q)$表由P到Q沿圓D之劣弧走的距離。試證：

$d_E(P,Q)\geq d(P,Q)$。(10分)

*****面試試題A*****

令a,b,c爲實數，λ滿足方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$。 求一非零的實係數多項式$P(x)$(其係數利用a,b,c表示)，使得 $P(\lambda^2)=0.$。

*****面試試題B*****

甲乙兩人進行比賽，假設賽局沒有和局，每賽一局，甲得勝的機率皆是p， 與前幾局的勝負無關。k爲正整數，令a_k表賽完$2k-1$局時， 甲贏的局數多於乙的機率。

1. 試證：當 $1>p>\frac{1}{2}$時，$a_{k+1}-a_k>0$ (此即，賽越多局甲領先的機率越大)。提示：考慮由領先變落後 (反勝爲敗)與反敗爲勝的機率。
2. 假設已知：當$-1<x<1$時

$$(1+X)^{-\frac{1}{2}}=1+2\sum_{n=1}C_{n-1}^{2n-1}(-\frac{x}{4})^n$$

，求 $\lim_{k\to\infty}a_k$之值。