

# 臺灣大學數學系

## 八十七學年度大學推薦甄試數學學科試題

[\[回上頁\]](#)

1.

設  $\sin \theta + \cos \theta = t$

a.

試將  $P = 3(\cos \theta + \sin \theta) + 4 \sin \theta \cos \theta$  用  $t$  表示。(2分)

b.

當  $\theta$  在  $0$  到  $2\pi$  之間變動時，分別求  $t$  值(2分)與  $P$  值(4分)的變化範圍。

2.

設直線  $L_0 : ax + by + c = 0$  與圓  $C_0 : x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  相交於  $P_1, P_2$  兩

相異點。若  $k$  為一實數，我們知道圓

$C : x^2 + y^2 + dx + ey + f + k(ax + by + c) = 0$  通過  $P_1, P_2$  兩點。試證：任一過

$P_1, P_2$  兩點的圓必為

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f + k(ax + by + c) = 0$$

，其中  $k$  為一實數(8分)。

3.

設  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  為三個空間向量。已知： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  所張的平行六面體體積為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

的絕對值。今將  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  這九個數分別丟一銅板來設定它為1或2(正面為1，反面為2)，則上述行列式的值為零的機率等於多少？(8分)

4.

點  $P$  為實係數三次多項式  $f(x)$  的反曲點， $Q$  為  $f(x)$  圖形上異於  $P$  之一點。試證：

a.

過  $P$  點的切線與  $f(x)$  的圖形只交於切點。(4分)

b.

過  $Q$  點的切線與  $f(x)$  的圖形不只交於一點。(4分)

5.

地球的子午線由北極到南極長20000公里，北緯 $\theta$ 弧度以北的面積用  $f(\theta)$  表示。

a.

根據  $f'(\theta) = \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{f(x) - f(\theta)}{x - \theta}$ ，你認為  $f'(\theta)$  應該是什麼？理由呢？(4分)

b.

利用上面的  $f'(\theta)$ ，求出赤道到北緯  $\frac{\pi}{6}$  弧度間的面積。(4分)

\*\*\*\*\*面試試題A\*\*\*\*\*

若正整數  $n$  可寫成  $2^k$ ，其中  $k$  為正整數或零，則稱  $n$  是2的幕次。例如 1, 2, 4, 8, ... 等都是2的幕次。試證：

1.

若  $n$  是2的幕次，則  $n$  無法寫成兩個或兩個以上的連續正整數之和。

2.

若  $n$  不是2的幕次，則  $n$  可寫成兩個或兩個以上的連續正整數之和。

\*\*\*\*\*面試試題B\*\*\*\*\*

設  $E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ ,  $E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ,  $E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$  為空間中三平面，令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

請就三平面  $E_1, E_2, E_3$  間的相關位置(如平行，重疊，相交，...)與  $\Delta, \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2$  是否為零加以詳細的討論。

[\[回上頁\]](#)