

臺灣大學數學系

八十六學年度大學推薦甄試數學學科試題

[\[回上頁\]](#)

1.

請將下列各式化成 $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ 的形式 (其中 a, b, c 為有理數)。

a.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4+1}} \text{ (2分) }。$$

b.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4+5}\sqrt[3]{2+1}} \text{ (4分) }。$$

2.

考慮下列條件，

A.

$$f(1) = 1, f(2) = 2$$

B.

對於每一實數，都有 $f(x) \geq 0$ ，

C.

$$f'(3) = 0$$

請(不必化簡)

a.

找出一多項式 $f(x)$ ，滿足(A)及(B)(3分)，

b.

找出一多項式 $f(x)$ ，滿足(A),(B)及(C)(3分)。

3.

設矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix},$$

其中 a_{ij}, b_{ij} 皆為實數。請說明：(提示：內積)

a.

是否存在 A, B 滿足

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2分)

b.

是否存在 A, B 滿足

$$\begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4分)

4. 甲乙丙...等16個人參加網球比賽，採單淘汰制，先抽籤決定號次再進行比賽。假設：甲為超強，其餘選手程度相當，除甲外的其他諸選手相互對局時各有 $\frac{1}{2}$ 的機率取得勝利，碰到甲時則只有 $\frac{1}{4}$ 的機率取得勝利。問乙得冠軍的機率為若干？(6分)

5. 求點(-26,0)到曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ 的最短距離。

6. 假設 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，試證

a. $1 + \frac{1}{4} \sin(2x) \leq \cos x + \sin x$ (3分)

b. $1 + \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - x) \leq \cos x + \sin x$ (3分)

7. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 滿足下面兩條件：

A. $a_n^3 + 5b_n^3 = (\frac{1}{2^n})^3$

B. $a_n - 2b_n = \frac{1}{3^n}$

試證：

a. $a_n > 0, b_n > 0$ (2分)

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (2分)

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ (4分)

8. 在無窮的平面網格上(由無窮多水平線與垂直線所行成)，每一格之內放置一個自然數(可重複)，使其每一格的數都等於其相鄰上下左右四格的平均值。張三說：要完成這樣的配置，必須每一格放置相同的正整數。請問：張三的說法正確嗎(1分)？請說出你的論證(5分)。

*****A題口試試題*****

1. 有一圓形的紙張，紙張上有一點 P ， P 不是圓心。
2. 任選一方向將紙張摺疊，使得 P 點恰在摺過來的紙的邊緣上(如所附圓紙片)，攤開之後在摺痕上畫線。
3. 選很多方向一一畫線之後如樣品所示。仔細觀察樣品，你看到什麼幾何圖形？當摺線越畫越多時該幾何圖形的極限狀況為何？能確定嗎？

[\[回上頁\]](#)