

臺灣大學數學系

九十一學年度學士班申請入學筆試試題

數學(一)

[\[回上頁\]](#)

說明: 每題20分。答題時,計算題要有計算過程,證明題要論證清晰完整。請儘量作答,計算或證明不完全者,可就正確部分得部分分數。

1.

試求出所有整數 a, b, c , 使得

$$\frac{36}{385} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7} + \frac{c}{11},$$

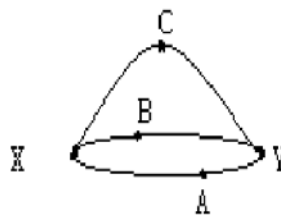
且 $|a| < 5, |b| < 7, |c| < 11$ 。

2.

下圖為一立體框架。其中 \widehat{XAY} , \widehat{XBY} , \widehat{XCY} 皆為長度 l 之圓弧, 而 X, Y 為三圓弧

相交之三叉點, 且 A 為弧 \widehat{XAY} 之中點。現有一螞蟻由 A 點出發往 X 點爬行。假設牠一直往前行, 絕不回頭。到了三叉點, 牠隨機地由兩條路中選一條 (因此機率各為 $\frac{1}{2}$), 繼續往前。在

此情況下, 若是牠又回到 A , 則其爬行距離之期望值為何?



3.

令 a, b, c 為三角形之三邊長。試證明:

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

並證明: "等號成立" 若且唯若 "三角形為等邊三角形"。

4.

平面上有一 n 邊形區域 $P_1P_2P_3 \cdots P_n$ ($n \geq 3$), 其頂點為

$P_j = (x_j, y_j), (j = 1, 2, \dots, n)$ 。有人提出多邊形區域的面積應是

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j)$$

(此處規定 $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$)。但因面積是『正的』,而公式中的答案可能為負,那麼應該如何修正才好? 並請證明你所給的公式。

5.

如果平面上之點 P 的座標 (x, y) 都是整數,我們稱之為格子點。現在假設平面上有一個 n 邊形區域 $P_1 P_2 P_3 \cdots P_n$ ($n \geq 3$), 其頂點 P_j 都是格子點。我們算出它在週邊上有 l 個格子點, 而在多邊形內部(邊上不算)有 k 個格子點。你能夠用 k, l 表達出這 n 邊形區域的面積嗎? 並請證明你所給的答案。

臺灣大學數學系
九十一學年度學士班申請入學筆試試題
數學(二)

說明: 每題20分。答題時,計算題要有計算過程,證明題要論證清晰完整。請儘量作答,計算或證明不完全者,可就正確部分得部分分數。

1.

考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1 P_2 P_3 \cdots P_n$ ($n \geq 3$)。這是一個島國,週邊是海洋。因此,其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。試證明:她的領海面積是

$$(p + \pi d)d.$$

2.

令 $L: x + 2y = 4$ 為平面上一直線,且 R_L 是個以 L 為鏡面的鏡射. 請問:是否存在一矩陣

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 及 $[u, v]$, 使得鏡射 R_L 將平面上任一點 $[x, y]$ 對應至

$$[x, y] \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + [u, v]?$$

若存在, 試求 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 及 $[u, v]$ 。

3.

令 $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), Q(x)$ 為複係數之多項式, 且滿足

$$P_1(x^5) + xP_2(x^5) + x^2P_3(x^5) + x^3P_4(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)Q(x)$$

證明: $x - 1$ 是 $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), Q(x)$ 之因式。

4.

證明:

$$\cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 n\theta = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\theta \cos (n+1)\theta}{2 \sin \theta}.$$

5.

某國的沙漠中有 A, B, C 三個綠洲, 這裡把它們都看成"點", 而這三個點形成 銳角三角形。現國王打算選擇一點 P 作為控管中心, 選擇的條件是 P 到三點的距離 總和 $\bar{PA} + \bar{PB} + \bar{PC}$ 為最小。試證明: 對此點 P , 滿足 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ 。請問: 如何用幾何作圖(只用圓規直尺)得到這一點 P 。如果不是銳角三角形, 則又如何?

[\[回上頁\]](#)