國立臺灣大學數學系九十九學年度學士班甄選入學

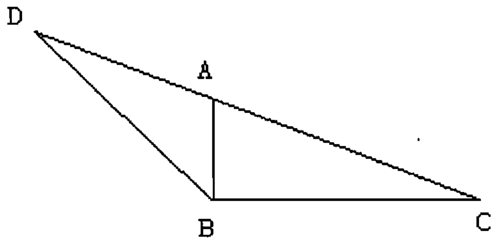
第二階段筆試試題(一)

2010 年 4 月 10 日上午 9:00-11:00

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫，試題共四大題，每題各佔 25%。

1. 令 n 爲一任意正整數，試證明行列式 $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \frac{1}{n+4} \end{vmatrix}$ 恆不爲零。

2. 如下圖，已知 $\angle ABC = 90^\circ$，$\angle ABD = 45^\circ$，BC長爲 $3\sqrt{10}$ 且AD長爲 5，試求 AC 之長。



3. 已知兩正整數的最小公倍數爲 5772，和爲 600。試求這兩個正整數。

4. 某賭場有一賭桌，由 3 個骰子的點數來定輸贏。此賭桌的 A 區，賠率爲 1 賠 1。賭客可押大或押小，若 3 個骰子的點數和大於或等於 11，則押大的賭客勝，若 3 個骰子的點數和小於或等於 10，則押小的賭客勝，但是若 3 個骰子的點數一樣(即 3 個骰子一樣都是 1 點或都是 2 點等等)，則莊家大小通吃(即押大與押小的賭客皆輸)。此賭桌的 B 區，賭客可押 1 點，2 點，3 點，4 點，5 點或 6 點，若 3 個骰子的點數與賭客押的點數有 1 個一樣，則莊家 1 賠 1，若 3 個骰子的點數與賭客押的點數有 2 個一樣，則莊家 1 賠 2，若 3 個骰子的點數與賭客押的點數有 3 個一樣，則莊家 1 賠 3，若 3 個骰子的點數與賭客押的點數都不一樣，則莊家贏。

   註：”莊家 1 賠 1”意即假設賭客下注 1 元，若賭客勝，則賭客除了拿回下注的 1 元之外，莊家另賠給賭客 1 元。同理，”莊家 1 賠 2”意即假設賭客下注 1 元，若賭客勝，則賭客除了拿回下注的 1 元之外，莊家另賠給賭客 2 元。

(1) 今有一賭客帶了 1000 元在 A 區賭了若干天，每次下注 1 元，總共下注 5400 次，試問他大約輸了多少元?

(2) 另有一賭客帶了 2000 元在 B 區賭了若干天，每次下注 1 元，總共下注 5400 次，試問他大約輸了多少元?

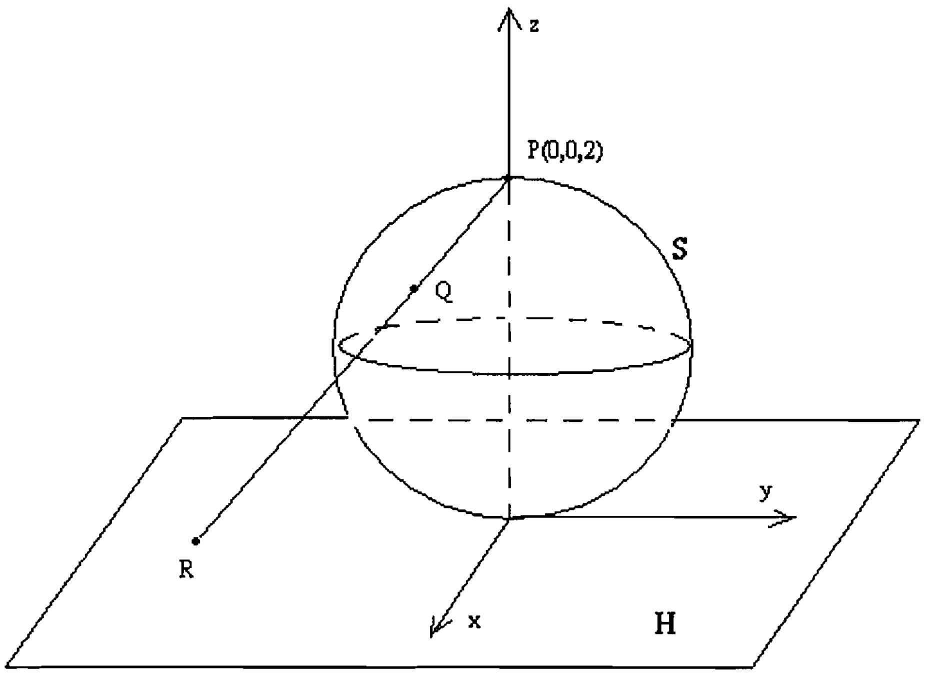
國立臺灣大學數學系九十九學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題(二)

2010 年 4 月 10 日下午 14:00-16:00

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫，試題共四大題，每題各佔 25%。

1. 給一球面 S 其方程式爲$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$，點 P(0, 0, 2)爲球面上一點。過球面上任一非 P 的點 Q，作 PQ 連線交 xy -平面 H 於一點 R。考慮一函數 ϕ: H→S 將 R 點映至 Q 點，試求 ϕ 之坐標表示式，並證明 ϕ 對於平面 H 上任一圓 Γ ，$\phi(\Gamma)$必爲一圓。



2. 令 α，β，γ 爲三角形之三內角，證明 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$。且等號成立若且唯若 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$。(提示:考慮 $\sin x$ 的函數圖形)

3. 給定一個三次曲線 C 其方程式爲 $y = x^3 - x$，以及一個橢圓 Γ: $\frac{x^2}{4} + y^2 = r^2$。試用 r 的範圍討論 C 和 Γ 之交點數。

(接下頁)

4. 前言：我們可以很容易地觀察到下面這兩串數列

$$(a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots) = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$$
$$(a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots) = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

皆滿足 $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$。

以下，我們將推廣這個觀察。

令 w 爲一任意非零實數。考慮一數列 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ 滿足關係式

$$a_{n+2} = 2w \cdot a_{n+1} - w^2 \cdot a_n \qquad (*)$$

(1) 假設數列 b_n，c_n 皆滿足（$*$）
即

$$b_{n+2} = 2w \cdot b_{n+1} - w^2 \cdot b_n$$
$$c_{n+2} = 2w \cdot c_{n+1} - w^2 \cdot c_n$$

證明對所有實數 r, s，數列 $r \cdot b_n + s \cdot c_n$ 滿足（$*$）。

(2) 找出 x 使得數列 $d_n = x^n$ 滿足（$*$）。

(3) 令 $b_n = \frac{a_n}{w^n}$，證明數列 b_n 滿足關係式 $b_{n+1} = \frac{b_n + b_{n+2}}{2}$。

(4) 假設 $a_0 = u$，$a_1 = v$。試找出 a_n 的表示式，即將 a_n 具體地寫爲 u, v, w, n 的函數。