國立臺灣大學數學系九十八學年度學士班甄選入學
第二階段筆試試題

2009 年三月二十八日下午 1:30-3:30

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫, 試題正反兩面共四題。

不得使用電子計算器

1. 令 K 爲坐標平面上由 $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$ 四頂點所圍出的菱形, 而 Γ 爲將菱形K以點 $(0,0)$ 爲中心, 順時鐘方向旋轉 30^o 後形成的新菱形。又 E_r 爲坐標平面上的點集合

$$E_r = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{(x+y-5)^2}{2} + (x-y-1)^2 \leq r^2 \right\},$$

在此$r \geq 0$。

(a) 試求 Γ 的四個頂點座標。

(b) 試描述 E_r 當 $r=1$。

(c) 試決定 r 值的範圍, 使得 E_r 與 Γ 至多只有一個交點。

2. **(a)** 若有二實數列 $\{u_1,\ldots,u_n\}$, $\{v_1,\ldots,v_n\}$, 且令 $S_k = u_1+\cdots+u_k$。證明

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_n v_n.$$

(b) 現給定三實數列 $\{a_1,\ldots,a_n\}$, $\{b_1,\ldots,b_n\}$, $\{c_1,\ldots,c_n\}$, 其中 $b_k>0, c_k>0$, $k=1,\ldots,n$。令 a_k/b_k, $1\leq k\leq n$, 的最小值及最大值分別爲 m 及 M。

(1) 試證

$$m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k c_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k c_k} \leq M.$$

(2) 若知 $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0$, 令

$$t_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

且 ℓ 及 L 分別爲 $t_1,\ldots,t_n$ 的最小值及最大值。證明以下改進的不等式

$$m \leq \ell \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k c_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k c_k} \leq L \leq M.$$

3. 設 α 爲一正整數且 $\sqrt{\alpha}$ 不是整數, 若 r 爲一有理數且存在二正整數 a, b 使得

$$r = \frac{a}{b} \quad 且 \quad |a^2 - \alpha b^2| = 1,$$

則稱 r 幾乎等於 $\sqrt{\alpha}$ 且以 $r \sim \sqrt{\alpha}$ 表之。

(a) 試求二正整數 a, b 使得 $a/b \sim \sqrt{3}$。

(b) 若 a, b, α 爲正整數且 $|a^2 - \alpha b^2| = 1$, 試證

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{\alpha} \right| < \frac{1}{b^2}.$$

(c) 若 a_1, b_1 爲正整數且 $|a_1^2 - 2b_1^2| = 1$, 試證存在二正整數 a_2, b_2 使得

$$|a_2^2 - 2b_2^2| = 1 \quad 且 \quad b_1 < b_2.$$

(提示: 已知 $3/2 \sim \sqrt{2}, 17/12 \sim \sqrt{2}$ 且 $7/5 \sim \sqrt{2}, 99/70 \sim \sqrt{2}$, 試觀察其所呈現之規律性。)

(d) 若 a_1, b_1, α 爲正整數且 $|a_1^2 - \alpha b_1^2| = 1$, 試證存在二正整數 a_2, b_2 使得

$$|a_2^2 - \alpha b_2^2| = 1 \quad 且 \quad b_1 < b_2.$$

4. 甲、乙、丙三人依甲、乙、丙、甲、乙、丙、$\cdots$之次序輪流擲一公平的骰子進行比賽, 並規定任何一人擲出 1 點時, 即立刻出局, 由餘下的參賽者持續擲骰子, 直至最後一位擲出 1 點時, 比賽停止。

(a) 令 A, B, C 分別代表甲、乙、丙是第一位出局的事件, 試求A, B, C 三事件的機率 (即 $P(A), P(B)$, 及 $P(C)$)。

(b) 令 D 代表甲是第 2 位出局的事件, 試求 $P(D)$。

(c) 試求乙比甲先出局的機率。

國立臺灣大學數學系九十八學年度學士班甄選入學
第二階段筆試試題

2009 年三月二十八日下午4:00-6:00

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫, 試題正反兩面共四題。

不得使用電子計算器

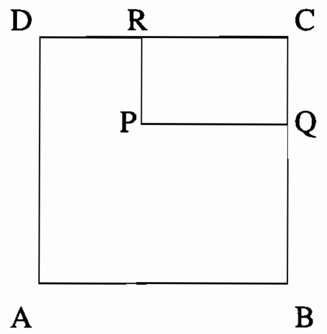
1. 討論下列方程組的解

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= 10 \\ xyz &= 2 + x + y + z \\ x + y + z &> 0. \end{aligned}$$

   (a) 說明此方程組的解確實存在。(提示: 試考慮 $(t-x)(t-y)(t-z)=0$)

   (b) 證明此方程組只有一解。

2. 如下圖, 正方形 $ABCD$ 的邊長為17, 點 P 位於正方形內, 且 $\overline{AP}=13$。R 為 $\overline{CD}$ 邊上一點, Q 為 $\overline{BC}$ 邊上一點, 且$\overline{PQ}\perp\overline{BC}$, $\overline{PR}\perp\overline{CD}$。試問長方形 $PQCR$ 面積的最小值為何? 此時點 P 在何處?



3. 設點 P 在數線上的整數點間跳動, 每次隨機地向左或向右跳動一單位 (即從 a 向左跳到 $a-1$ 或向右跳到 $a+1$)。設開始時, 點 P 在 3 的位置上, 然後開始隨機地向左或向右跳動, 其向左跳動的機率爲 2/3, 而向右跳動的機率爲1/3, 且點 P 在跳到 0 或跳到 4 就停止, 不再跳動。

   (a) 試問點 P 最後停在 4 的機率爲多少?

   (提示: 若開始時, 點 P 在 i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 的位置上, 令點 P 最後停在 4 的機率爲 p_i 。)

   (b) 試問點 P 最後停在 0 的機率爲多少?

   (c) 試問平均跳幾次才會停止。

4. 令 N 表所有正整數的集合。設 a, b, c 爲正整數且 a, b, c 的最大公因數爲 1。證明集合

$$\{xa + yb + zc \mid x, y, z \in N\}$$

與 N 相比較, 只少了有限個正整數。