國立臺灣大學數學系九十七學年度學士班甄選入學
第二階段筆試試題

2008年三月二十九日上午9:00-11:00

※ 不得使用計算機

1. 已知 $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1$，令

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} |t - x_i|, \quad \text{當 } 0 \le t \le 1.$$

(a) 試求 t 之值使得 $f(t)$ 達到最小值。
(b) 設 $t = d$ 時，$f(t)$ 達到最大值 M。試問 d 及 M 爲何?
(c) 試証明 $M \ge n/2$。

2. 設方程式 $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x + 1 = 0$ 的四個根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$。試求下列方程式的解

$$\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} + \frac{1}{x-\alpha_4} = 0.$$

3. 甲乙二人參加一比賽, 於該比賽中, 甲擲 3 顆公平骰子一次, 此 3 顆骰子中 最大的點數, 爲甲所得的點數; 乙擲 4 顆公平骰子一次, 此 4 顆骰子中 最大的點數, 爲乙所得的點數。若甲所得的點數大於或等於乙所得的點數, 則 甲獲勝。反之, 則乙獲勝。試問甲獲勝的機率爲何?

4. (a) 設

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{66} + \frac{1}{67} = \frac{p}{q},$$

其中 p, q 爲正整數。試證 p 可被 101 整除。

(b) 已知當 $n \to \infty$ 時, 下列數列

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - a \log_{10} n$$

收斂, 其中 a 爲一常數。試證

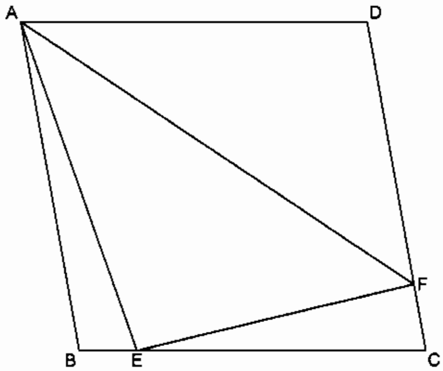
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = a \log_{10} 2.$$

國立臺灣大學數學系九十七學年度學士班甄選入學
第二階段筆試試題
2008年三月二十九日下午2:00-4:00

※ 不得使用計算機

1. 設 $K_a = \{(x,y,z) : x^2+y^2+|z| \le a\}$ 。
   (a) 設 $a \ge 0$ 時, 試描述 K_a 並求 K_a 的體積。
   (b) 當 $0 \le a \le 7$ 時, 試求點 $(2,2,1)$ 與 K_a 之最短距離。

2. 如下圖, $ABCD$ 為一平行四邊形, 且 $\triangle ABE, \triangle ECF, \triangle FDA$ 的面積分別為 $12, 16$, 及 40 。試問 $\triangle AEF$ 的面積為何?



3. 已知 a,b,c,d 為正實數, 而

$$S = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}.$$

   試求 S 值的範圍。

4. 一圓形劇場共有 31 個入口, 等距設置, 並依序編號為 A_1 , A_2 , $\cdots$, 至 A_{31} 。在這其中的 9 個入口僅供殘障者使用。試證明在 $(A_1, A_2, \ldots, A_7)$, $(A_2, A_3, \ldots, A_8)$, $\cdots$, $(A_{31}, A_1, \ldots, A_6)$ 這 31 組的組合中, 至少有一組合包含 3 個 (含) 以上供殘障者使用的入口。