

**國立臺灣大學數學系九十六學年度學士班甄選入學
第二階段筆試試題**

2007年三月三十一日上午9:00-11:00

不得使用電子計算器

1. 設 $f(x)$ 為一有理係數的五次多項式, 且對所有整數 $n \geq 5, f(n)$ 均為整數。試證明存在整數 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ 使得

$$f(x) = c_5 C_5^x + c_4 C_4^x + c_3 C_3^x + c_2 C_2^x + c_1 C_1^x + c_0,$$

其中 C_r^x 代表 $\frac{x(x-1)\dots(x-r+1)}{r!}$ 。

2. 設 m, n, k 為正整數, $25n^2 + 508n + k = m^2$, 且 $2400 \leq k \leq 2410$ 。試求 m 之值。

3. 設 $K = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ 為一4階方陣。若

- (1) K 中每一行皆為1, 2, 3, 4的排列; (2) K 中每一列皆為1, 2, 3, 4的排列;
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 為1, 2, 3, 4的排列; (4) b_1, b_2, b_3, b_4 為1, 2, 3, 4的排列;
(5) c_1, c_2, c_3, c_4 為1, 2, 3, 4的排列; (6) d_1, d_2, d_3, d_4 為1, 2, 3, 4的排列。
則 K 稱為一4階數獨。

(I) 試問有多少個4階數獨 K 使得 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, b_1 = 3,$

$$b_2 = 4, c_1 = 2, c_3 = 4。$$

(II) 試問有多少個4階數獨?

4. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, g(x) = x^2 + x + d$ 且 $1 - 4d < 0$, 已知 $f(x)$ 的最大實根為 α , 且 $f(g(x))$ 無任何實根, 試求 $f(d)$ 之最小值。

國立臺灣大學數學系九十六學年度學士班甄選入學
第二階段筆試試題

2007年三月三十一日下午2:00-4:00

不得使用電子計算器

1. 設 $f(x) = x^4 - 20x^2 + 2x + 37$ 。試問是否在 $y = f(x)$ 的圖形上存在4個相異點 $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)), D(d, f(d))$, 使得 A, B, C, D 四點共線, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ 且 $a < b < c < d$? 若存在, 試求此4點之坐標。
2. 設 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 為平面上之三角形, 且 \overrightarrow{AB} 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 恰交於一點 P , \overrightarrow{BC} 和 $\overrightarrow{B'C'}$ 恰交於一點 Q , \overrightarrow{CA} 和 $\overrightarrow{C'A'}$ 恰交於一點 R 。
試證明如果 P, Q, R 共線, 則 $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ 三線共點或平行, 反之亦然。
3. 考慮空間中的區域 $S_a = \{(x, y, z) | z = 0, |x| + |y| \leq a\}$ 。當 $a \geq 0$, 求點 $(4, 3, 2)$ 至區域 S_a 的最短距離。
4. 某地有一湖, 湖的四周有環湖公路, 長 12000 公尺。甲、乙兩人常騎自行車在環湖公路上繞湖。他們每次行至某一點 A 後, 就往回走。今甲從 A 點開始騎自行車繞湖, 已知其朋友乙早已在環湖公路上。
當甲、乙兩人騎自行車的速度一樣時, 試問甲大概要走幾公尺後可遇到乙?
若甲改為開車繞湖, 且知甲開車速度為乙騎自行車速度的4倍, 試問甲大概要走幾公尺後可遇到乙?