國立台灣大學數學系95學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題 2006/4/1 上午 9:00-11:00

1. 設 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n}$, 其中 a_0, a_1, $\cdots$ 爲係數。證 $a_0 + a_3 + a_6 + \cdots = a_1 + a_4 + a_7 + \cdots = a_2 + a_5 + a_8 + \cdots = 3^{n-1}$。

2. 設 $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(5,10)$, $P(-15,0)$ 爲 xy-平面上之四點。若 L 爲過點 P 之直線, 且 L 將 $\triangle OAB$ 分成面積相等之兩部份, 求 L 之方程式。

3. 以剪刀, 石頭, 布猜拳。

   (a) 若兩人猜, 平均要猜幾次才分勝負。

   (b) 現有三人一起猜拳 (三人一起出拳)。若兩人勝一人, 則勝者二人繼續猜。若一人勝二人, 此人勝出。問平均要猜幾次, 才能剛好有一人勝出。

4. 設 A 爲 3×3 之方陣。對任何 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ 均有 $|A\vec{u} \times A\vec{v}| = |\vec{u} \times \vec{v}|$。

   (1) 設 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ 互相垂直且長度爲 1。證明 $A\vec{u} \times A\vec{v}$, $A\vec{u} \times A\vec{w}$ 也是互相垂直且長度爲 1。

   (2) 證明: $|A\vec{u}| = |\vec{u}|$ 對所有 $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ 均成立。

國立台灣大學數學系95學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題 2006/4/1 下午 2:00-4:00

1. 設 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, $g(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2$, 且 α, β, γ 爲 $f(x) = 0$ 之 3 根。

   (1) 試求 $g(\alpha) \cdot g(\beta) \cdot g(\gamma)$ 之值。

   (2) 試求 $\dfrac{1}{g(\alpha)} + \dfrac{1}{g(\beta)} + \dfrac{1}{g(\gamma)}$ 之值。

2. 設 E_1, E_2, E_3 爲空間中三個平面, 且都通過原點 O。已知 E_1 和 E_2 互相垂直。E_1 和 E_3 夾角爲 $60°$。E_2 和 E_3 夾角也是 $60°$。設 L 爲過原點之直線。若 L 和 E_1 之夾角爲 $30°$, 而 L 和 E_2 之夾角也是 $30°$, 試求 L 與 E_3 之夾角爲何?

3. 用 7 種顏色塗在正六面體的 6 個面上, 不同面用不同顏色。

   (1) 試問可塗成幾種正六面體?

   (2) 若每個面用此 7 種顏色再畫上字母 O, 字母 O 所用顏色與底色不同, 且不同面的 O 用不同顏色, 試問有幾種正六面體?

4. 設 N_0 表示所有非負整數的集合。假設對所有 $m, n \in N_0$, 函數 $f : N_0 \longrightarrow N_0$ 滿足 $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ 或 1, 且 $f(8888) = 2222$。

   (1) 試証 $k - 1 \geq f(\sum_{i=1}^{k} n_i) - \sum_{i=1}^{k} f(n_i) \geq 0$,

   (2) 求 $f(4)$,

   (3) 求 $f(2006)$。