

國立台灣大學數學系九十四學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題 · 2005/4/2 上午 9:00-^{11:00}~~12:00~~

- 一 已知 $x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + k = 0$ 有二根之和為 1. 試求 k 之值及此方程式之 4 個根.
- 二 若圓之內接四邊形對角線互相正交, 則自交點向一邊作垂線必平分其對邊.
- 三 解 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ 於 $45^\circ < x < 225^\circ$ 的範圍內.
- 四 某班有 n 個學生, 學號從 1 排至 n . 今有數學考卷, 老師想將考卷分成單號與雙號兩堆. 從第一張考卷開始, 若遇到連續幾張雙號的考卷, 則一起抽出, 放在另一堆. 若遇到單號, 則不抽出.
 - (1) 若 $n = 13$, 則抽出之總次數為 3 次之機率為多少?
 - (2) 若 $n = 12$, 則抽出之總次數的期望值為多少?
 - (3) 若 $n = 4k$, 則抽出之總次數的期望值為多少?

國立台灣大學數學系九十四學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題 2005/4/2 下午 2:00-4:00

- 一 已知一雙曲線過點 $(1, 1)$ 且以 $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$ 為其漸近線。

試求此雙曲線之方程式。

- 二 (1) 設 $a, b > 0$. 試證 $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

(2) 設 k 為實數. 若對任何正實數 x, y

- 三 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{x+y}$ 皆成立,

則 k 之最小值為何?

- 四 求 $\frac{x^2}{8} - 6 \log x + 1.68 = 0$ 的所有近似根。

提示 1: $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 7 = 0.8451$.

提示 2: 先求根的範圍, 再用內插法。

- 四 設 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 為平面上三個向量. 假設對平面上任一非零向量 \vec{u}

$\vec{u} \cdot \vec{p}, \vec{u} \cdot \vec{q}, \vec{u} \cdot \vec{r}$ 三個數一定有正有負. 試證存在三正數 a, b, c 使得

$$a \vec{p} + b \vec{q} + c \vec{r} = \vec{0}$$

($\vec{u} \cdot \vec{p}$ 表示 \vec{u} 和 \vec{p} 之內積)