

國立台灣大學數學系九十三年學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題 2004/4/3 上午 9:00 - 11:00

一 設 x, y, z 為實數 且

$$-2 \leq x + y + 2z \leq 3$$

$$-3 \leq y + 2z \leq 1$$

$$-5 \leq x + 2y + 5z \leq 0$$

試求 $2x + 5y + 14z + 3$ 之最大值及其時之 x, y, z . (30%)

二 (1) 設 $\tan \alpha, \tan \beta$ 為二次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 之二根 .

試求二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 使得它的二根為

$$\cos 2\alpha, \cos 2\beta . \quad (15\%)$$

(2) 設 $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ 有三正根 .

$$\text{試證 } a^2 \geq 3b \text{ 且 } b^3 \geq 27c^2 . \quad (15\%)$$

三 試證 $\sum_{k=1}^n C_k^n k x^k (1-x)^{n-k} = nx$, 其中 $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (15%)

四 試求一圓, 經過原點, 而與下列兩個圓均正交,

$$x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

附註: 若兩圓相交, 且過交點之二切線互相垂直, 則稱兩圓正交 .

(25%)

國立台灣大學數學系九十三學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題 2004/4/3 下午 2:00 - 4:00

一 令 $x = \frac{1}{2}$, 試求

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1+x^{2^n}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \cdots (1+x^{2^n}) \cdots \text{之值.}$$

(20%)

二 試求拋物線 $y = 3x^2 - 2x + 1$ 之切線而與直線 $x + 4y + 3 = 0$ 垂直.

(15%)

三 (1) 試証平面上周長相同之 n 邊形中, 面積最大者為正 n 邊形.

(20%)

(2) 試証平面上面積相同之 n 邊形中, 周長最小者為正 n 邊形.

(15%)

四 一袋中有撲克牌 3 點 2 張, 2 點 3 張. 從袋中取出二張, 若二張點數

相同, 則放回後, 繼續再取. 若二張點數不同, 則結束不再取.

(1) 試問取出次數之期望值為何? (15%)

(2) 試問取出點數總和之期望值為何? (15%)