111 學年度台大數學系申請入學筆試上午考題:

注意事項. (i) 試題共兩頁四大題, 將過程寫在另發之答案本上, 標明題號, 並用藍色或黑色筆書寫.

(ii) 請儘量答題, 呈現你對問題的理解程度. 請在答案卷上提供作答過程, 切勿只寫答案, 閱卷會依答題狀況給予部分分數.

(iii) 考試不准使用計算機與任何 3C 產品.

1. (25%) 令 a, b, c 爲 $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$ 的三個解. 對於 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$f(n) = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

(a) 求$f(1)$, $f(2)$ 及 $f(3)$ 的值。

(b) 求 $f(4)$ 並導出 $f(n+3)$, $f(n+2)$, $f(n+1)$ 及 $f(n)$ 的遞迴式。

(c) 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^5 \\ 1 & b & b^5 \\ 1 & c & c^5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

求矩陣 A 的行列式除以矩陣 B 的行列式之值。

2. (25%)

(a) 求拋物線 $y = x^2 - x + a$ 頂點, 並就 a 值分析圖形與 x 軸的相交情況.

(b) 令 $0 < a < \frac{1}{4}$, 且已知數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $0 < x_{n+1} \leq a + x_n^2$. 證明若 $0 < x_1 \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$, 則對所有自然數 n, 相同的不等式也成立, 即:

$$0 < x_n \leq \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - a}.$$

(c) 承上, 若數列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 係以遞迴式定義 $y_{n+1} = a + y_n^2$, 且 $0 < y_1 \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$. 證明 $|y_{n+1} - y_n|$ 被一收斂之等比數列所控制. 也就是存在有 $C > 0, 0 < r < 1$, 使得 $|y_{n+1} - y_n| \leq Cr^{n-1}$.

(d) 證明 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂.

3. (25%) 假設 C 是以 O 爲圓心, r 爲半徑的圓, 弧 ANB 爲圓 C 的劣弧且 N 爲中點. M 爲 $\overline{AB}$ 的中點, Y 爲 $\overline{AM}$ 上的一點. (參見 Figure 1.)

(a) 試證 $\sin \angle ANO \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

日期: 10:00-12:00, May 19, 2022.

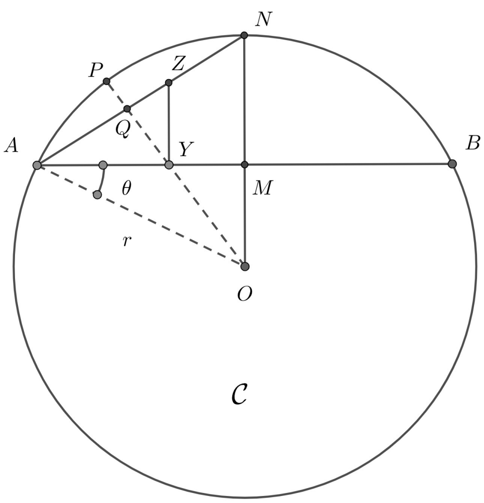

FIGURE 1

(b) 令 Y 點與圓 C 的距離爲 d, $\overline{AY}$ 線段長爲 s. 試證

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sec\theta - \tan\theta)s.$$

4. (25%) 現在有一千顆球, 每顆球給一個編號, 從 000, 001, 到 999. 有一百個箱子, 也給編號從 00, 01, 到 99. 一顆球可放入某一個箱子的規則是: 此箱子的編號可以由此顆球的編號刪除某一位數得到. 例如, 編號 543 的球可以放入編號 43 號的箱子, 或是 53 號的箱子, 或是 54 號的箱子. 試證明:

(a) 只需要 50 個箱子就可以讓所有的球放入.
(b) 最少的確需要 50 個箱子. 也就是說, 49 個箱子無法讓所有的球放入.

111 學年度台大數學系申請入學筆試下午考題:

注意事項. (i) 試題共一頁四大題, 將過程寫在另發之答案本上, 標明題號, 並用藍色或黑色筆書寫.

(ii) 請儘量答題, 呈現你對問題的理解程度. 請在答案卷上提供作答過程, 切勿只寫答案, 閱卷會依答題狀況給予部分分數.

(iii) 考試不准使用計算機與任何 3C 產品.

1. (25%) 令 S 是平面中以(h,k)爲圓心且 r 爲半徑的圓, 也就是

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}.$$

考慮下列事件: 從 S 隨機選出三個點 A, B, C, 使得三角形 $\triangle ABC$ 包含(h,k). 試求此事件發生的機率.

2. (25%)

(a) 請找出 $x^2 + y^2 = 1009$ 的所有正整數解.

(b) 假定有四個正整數 a, b, c, d 滿足

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c(a+b) + d, \\ 0 \le d &< a+b, \\ c^2 + d &= 1977 \end{aligned}$$

(b-1) 證明 $d < 90$.

(b-2) 求 a, b 所有可能的值.

3. (25%)

(a) 證明實數的柯西不等式:

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \ge (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2,$$

並討論等號成立的條件:

(b) 將 (a) 推廣至複數的情形.

4. (25%) 我們通常定義 π 爲單位半圓的弧長.

(a) 請問“弧長” 的定義是什麼? 他爲何是一個有限的實數?

(b) 證明半徑爲 R 的圓面積爲 πR^2.

(c) 證明半徑爲 R 的球表面積爲 $4\pi R^2$, 體積爲 $\frac{4}{3}\pi R^3$ (本小題可使用任何方法).

日期: 14:00-16:00, May 19, 2022.