

110 學年度台大數學系申請入學筆試上午考題:

注意事項. (i) 試題共一頁四大題, 將過程寫在另發之答案本上, 標明題號, 並用藍色或黑色筆書寫.

(ii) 請儘量答題, 呈現你對問題的理解程度. 請在答案卷上提供作答過程, 切勿只寫答案, 閱卷會依答題狀況給予部分分數.

(iii) 考試不准使用計算機與任何 3C 產品.

1. (25%) 輾轉相除法:

- 利用輾轉相除法求 204379 和 27993 的最大公因數.
- 證明輾轉相除法的原理.
- 找兩個整數 x 和 y 滿足

$$93x + 679y = 1.$$

2. (25%) 給定三角形 $\triangle ABC$, $|\overline{AB}| = 2$, $|\overline{BC}| = 3$, $|\overline{CA}| = 4$. 令 P 為 $\triangle ABC$ 的外心. 若

$$\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC},$$

求 x, y .

3. (25%) 考慮滿足以下兩性質之多項式:

- 所有根皆是實數;
- 所有係數皆是 1 或 -1.

例如, $(x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$.

試證明不存在次數超過 3 的這種多項式.

(提示: 假設 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 為該多項式的所有根, 可考慮 $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2$.)

4. (25%) 給一個正整數 a , 考慮方程式:

$$\sqrt{a} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

我們說此方程式有正整數解的意思是: 可以找個兩個正整數 x, y 使得方程式成立.

- 證明如果方程式有正整數解, a 必定有一個完全平方數的因數.
- 如果限制 $a \leq 1000$, 有多少個 a 會讓方程式有正整數解?

110 學年度台大數學系申請入學筆試下午考題:

注意事項. (i) 試題共一頁四大題, 將過程寫在另發之答案本上, 標明題號, 並用藍色或黑色筆書寫.

(ii) 請儘量答題, 呈現你對問題的理解程度. 請在答案卷上提供作答過程, 切勿只寫答案, 閱卷會依答題狀況給予部分分數.

(iii) 考試不准使用計算機與任何 3C 產品.

1. (25%) 求出

$$1 + 2\sqrt{3}\cos(x) + 2\sin(x) + \cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x)$$

的極大值和極小值.

2. (25%) 證明兩圓

$$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$

相交, 相切或相離的條件為

$$(a_1a_2 + b_1b_2 - \frac{c_1 + c_2}{2})^2 - (a_1^2 + b_1^2 - c_1)(a_2^2 + b_2^2 - c_2)$$

小於, 等於或大於 0. 再則, 證明此兩圓正交的條件是

$$a_1a_2 + b_1b_2 - \frac{c_1 + c_2}{2} = 0.$$

(題目中兩圓正交的定義是過兩圓交點的切線互相垂直.)

3. (25%) 解下列三次和四次方程式

$$x^3 - 6x - 6 = 0;$$

$$x^4 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0.$$

(提示: 解三次方程式時可設 $x = u + v$, 再適當選擇另一個 u 和 v 的關係式來解出 u, v . 解四次方程式時可設 $x^4 - 4\sqrt{3}x + 6 = (x^2 + t)^2 - \dots$, 選擇一個 t 的三次關係式, 解出 t 後再解 x .)

4. (25%) 甲有 m 元, 乙有 n 元, 其中 m, n 為非負整數. 兩人進行一場公正的硬幣遊戲, 正面甲贏乙一元, 反面乙贏甲一元. 求甲將乙的資本完全贏去的機率.

日期: 14:00-16:00, April 16, 2021.