台灣大學數學系 109 學年度學士班個人申請筆試試題

筆試一 10:00-12:00

- 試題共一頁四大題, 將過程寫在另發之答案本上, 標明題號, 並用藍色或黑色筆書寫.
- 請儘量答題, 呈現你對問題的理解程度. 閱卷會依答題狀況給予部分分數.
- 考試不准使用計算機與任何 3C 產品.

1. [25%] 回答下列問題：

   (a) 證明方程式 $x(x+2)(x-2)=1$ 有三個相異實根.

   (b) 將 $x(x+2)(x-2)=1$ 的三個相異實根記作 a, b, c. 計算下式的值
   $$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}$$

2. [25%] 有一邊長為 1 的正立方體, 假設其中 P, Q 為距離 $\sqrt{3}$ 的兩頂點, 且 PQ 垂直於桌面. 取兩個與桌面垂直且互相平行的平面 H 和 K 夾住此正立方體, 令 H 和 K 之距離 d 最小, 求 d 並說明此時 H, K 和該正方體的接觸狀況.

3. [25%] 在四面體 $ABCD$ 內部任意找一點 P, 令 $A' \in$ 三角形 BCD 且 A, P, A' 共線, 同理找出三角形 CDA, DAB, ABC 上的點 B', C', D', 求證
   $$\frac{AP}{AA'}+\frac{BP}{BB'}+\frac{CP}{CC'}+\frac{DP}{DD'}$$
   為一常數, 並求此常數.

4. [25%] 有一副充分洗好的 52 張撲克牌, 背面朝上. 規則：連續翻牌, 直到翻到第 13 張紅心就停止. 以隨機變數 $X=k$ 表示抽到第 k 次時翻到第 13 張紅心的事件, $k=13,14,\cdots 52$.

   (a) 何時機率 $\mathsf{P}(X=k)$ 最大？求 k.

   (b) 求隨機變數 X 之期望值 $\mathsf{E}(X)=\sum k\cdot \mathsf{P}(X=k)$.

台灣大學數學系 109 學年度學士班個人申請筆試試題

筆試二 14:00-16:00

- 試題共二頁四大題, 將過程寫在另發之答案本上, 標明題號, 並用藍色或黑色筆書寫.
- 請儘量答題, 呈現你對問題的理解程度. 閱卷會依答題狀況給予部分分數.
- 考試不准使用計算機與任何 3C 產品.

1. [25%] $\alpha = u + v\mathbf{i}$ 為一複數, u, v 為實數, $\mathbf{i}^2 = -1$. β 為實數. 若對任意絕對值為 1 的複數 w, 皆滿足 $w^2 + \alpha w + \beta$ 絕對值等於 1, 求證 $\alpha = \beta = 0$.

   (提示：對任意複數 z, z 的絕對值 $= \sqrt{z\bar{z}}$, 其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數.)

2. [25%] 給奇數顆公平六面骰子, 甲和乙進行以下遊戲：

   - [步驟一] 甲擲所有骰子, 拿走出現 ⚄、⚅ 的骰子.
   - [步驟二] 乙指定任兩個點數, 擲剩下的骰子, 拿走出現其指定面數之骰子.
   - 若還有骰子剩下, 依序重複步驟一及步驟二, 直到沒有骰子剩下.
   - 最後持有較多骰子者為贏家.

   換言之, 甲永遠指定 ⚄、⚅；而乙每回合皆可重新指定兩個點數.

   (a) 針對一特定骰子, 求它最終被甲持有的機率.

   (b) 假定一開始有 5 顆骰子, 乙獲勝機率為何？(無需通分整理最後答案)

3. [25%] 假設 k 是某實數使得下列的不等式對所有正實數 a, b, c 都成立·

   $$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc + k(a-b)(b-c)(c-a)$$

   (a) 找出一個非零實數 k 使得上列不等式成立·

   (b) 找出最大實數 k 使得上列不等式成立·

注意. 問題 4. 在下頁.

4. [25%] 《閱讀測驗》

令實數集合 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{m + n\sqrt{5} : m$ 和 n 為整數$\}$. 先定義一個新概念.

定義 1. （$\sqrt{5}$ **單位元**）若 $m + n\sqrt{5}$ 滿足 $m^2 - 5n^2 = \pm 1$, 稱它是 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中的 $\sqrt{5}$ **單位元**.

顯然, 若 $(m + n\sqrt{5})(m - n\sqrt{5}) = \pm 1$, 則 $m \pm n\sqrt{5}$ 都是 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中的 $\sqrt{5}$ 單位元. $\sqrt{5}$ 單位元在 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中扮演的角色就像 $\mathbb{Z}$ 中的 ± 1, 據此定義 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中的「質數」概念如下：

定義 2. （$\sqrt{5}$ **質數**）若 $p + q\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 表示成 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中兩數相乘時, 其中必然至少有一個是$\sqrt{5}$ 單位元, 則稱 $p + q\sqrt{5}$ 是 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中的 $\sqrt{5}$ **質數**.

換言之, $\sqrt{5}$ 質數不能表示成兩個非$\sqrt{5}$ 單位元的乘積. 依據上述定義, 回答下面問題：

(a) 證明 31 不是一個 $\sqrt{5}$ 質數. (提示：可考慮類似共軛數相乘的概念.)

(b) 證明 2 是一個 $\sqrt{5}$ 質數.