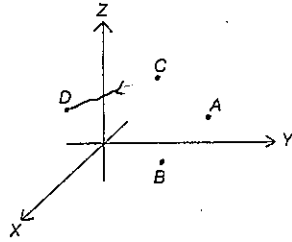


臺灣大學數學系 108 學年度學士班個人申請筆試試題

筆試一 10:00-12:00

- (1) 在 xyz 空間中有一點 $A(4, 3, 2)$ ，假設三個座標平面都是反射鏡。從 A 點將光線射向 xy 平面上的 B 點， B 點座標是 $(b, c, 0)$ ， $b > 0, c > 0$ ，反射後射到 yz 平面上的 C 點， C 點座標是 $(0, \beta, \gamma)$ ， $\beta > 0, \gamma > 0$ ，然後再反射到 xz 平面上的 $D(2, 0, 4)$ 。求 b, c, β, γ 。(請見下列示意圖)



- (2) (i) 考慮 $1 \times n$ 方格的著色問題，若有 d 種顏色， $d \geq 2$ ，將每一方格中填入一色，使得相鄰方格的顏色相異，請問共有幾種著色法。
 (ii) 將上述問題推廣至 $2 \times n$ 方格，求出著色法個數。

- (3) 請找出所有正整數 x 使得

$$\frac{x^3 + 3}{x + 3}$$

為整數。

- (4) z_1, z_2, z_3, z_4 為複數平面上相異四點。若此四點共圓，證明

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \text{ 必為實數。}$$

臺灣大學數學系 108 學年度學士班個人申請筆試試題

筆試二 14:00-16:00

- (1) 考慮 xyz 空間中通過點 $(1, 1, 1)$ 的平面 P ，並假設 P 與三個座標軸各交於第一卦限中的點 A 、 B 、 C 。記原點 $(0, 0, 0)$ 為 O 。
- (1) 求出使得三角錐 $OABC$ 達到最小可能體積的 P 。
- (2) 求出使得三角形 ABC 達到最小可能面積的 P 。
- (做答時請寫出 P 的方程式並說明理由。)

- (2) 組合數 C_k^n 的定義如下

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}, C_0^n = 1.$$

- (i) 試證

$$\sum_{k=1}^n C_k^n k x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

- (ii) 令 m 是一個小於 r 的正整數。試證

$$\sum_{0 \leq k \leq m} C_k^r \binom{r}{2-k} = \frac{m+1}{2} C_{m+1}^r.$$

- (3) 令 x 為滿足 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$ 的實數。請求出 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。

- (4) 將三角形三邊長記作 a 、 b 、 c ，將面積記作 A 。證明他們總是滿足

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

並找出等號成立條件。