

臺灣大學數學系 107 學年度學士班個人申請筆試試題

筆試一 9:00am - 9:55am

- (1) (25分) 令 n 為一正整數，其因式分解為 $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ (p_i 為相異質數、 e_i 為正整數)。
證明在整數 $1, \dots, n$ 中與 n 互質者之個數為

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

- (2) (25分) 考慮三維空間，在 xz 平面上有一直線 L 與 x 軸夾 45° 角， L 繞 z 軸旋轉一圈得到一個角錐 C 。空間中另有一平面 P ，其方程式為 $\sqrt{3}z - x - 1 = 0$ 。已知 P 與 C 相交的軌跡為一橢圓，求此橢圓的長軸 $2a$ 及短軸 $2b$ 。

臺灣大學數學系 107 學年度學士班個人申請筆試試題

筆試二 10:05am - 11:00am

(1) (25分) 令 a_1 、 a_2 、與 a_3 為複數平面上相異的三個點。試證 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ 若且唯若此三點為一個正三角形的三個頂點。

(2) (a) (10分) 證明

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(b) (15分) 考慮一副四種花色共52張的撲克牌的任意排列：得到第一張至第52張牌。在所有可能中有多少是（至少）有兩張A相鄰？（如一種可能為第23張為紅心A、第24張為梅花A。）