

國立臺灣大學數學系 106 學年度大學「個人申請」入學

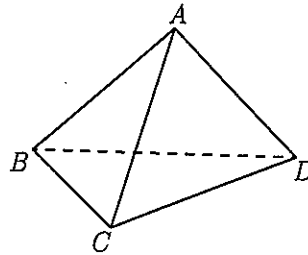
第二階段筆試試卷：筆試一

2017 年 3 月 25 日 09:00-09:40

- 試題共 A、B 兩題，考試時間 40 分鐘。請將詳細答題過程寫在另發之答案本上。
- 閱卷會依答題狀況給予部分分數。請盡量呈現你對問題的理解程度。
- 考試不准使用計算機或任何 3C 產品。

A. (25 分)

如圖有一四面體， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1$ ， $\angle BAD = \angle DAC = 60^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，求此四面體的體積。



B. (25 分)

某項特殊能力佔人口比例 4%，希望以某種檢定考試尋找這類人才。現檢定委員會發展檢定是非題，使具此特殊能力者答對機率 p ，一般人瞎猜答對的機率則為 50%。

1. (8 分) 設 $p = 90\%$ 。檢定考試出 k 題檢定題（假設彼此獨立），只錄取全對的人。若希望達到「錄取人有 90% 以上的機率具有特殊能力」的鑑定標準。 k 至少要多大，才能達成這個目標？
2. (7 分) 若希望 $k = 5$ ，但可以調整 p ，要如何調整才能維持上述鑑定水準。
3. (10 分) 假設固定上述鑑定標準和 p （當然 $p > \frac{1}{2}$ ）。有人建議將錄取條件從所有題目全對，放寬為容許最多錯一題。這個建議會比較容易達到 鑑定標準嗎？其中「比較容易達到」的定義：所使用的必須題數可不多於以全對為錄取條件時的必須題數。

($\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$)

國立臺灣大學數學系 106 學年度大學「個人申請」入學

第二階段筆試試卷：筆試二

2017 年 3 月 25 日 09:50-11:00

- 試題共 C、D 兩題，考試時間 70 分鐘。請將詳細答題過程寫在另發之答案本上。
- 閱卷會依答題狀況給予部分分數。請盡量呈現你對問題的理解程度。
- 考試不准使用計算機或任何 3C 產品。

C. (25 分) $f(x)$ 為一整係數多項式， $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，其中 a_0, a_1, \dots, a_n 皆為整數。已知

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

求證 a_n 是偶數，且用 $2x^2 - 1$ 以長除法去除 $f(x)$ 之商式也是整係數多項式。

D. (25 分)

1. (9 分) 有一複係數多項式

$$g(w) = (2 - 3i) + 8\sqrt{2}iw^3 + 4(\sqrt{3} - i)w^4$$

取 $w = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ ，在複數平面上以類似向量加法頭尾相接的方式，依序畫出代表 $2 - 3i$ 、 $8\sqrt{2}iw^3$ 與 $4(\sqrt{3} - i)w^4$ 三項的箭頭，以及代表總和 $g(w)$ 的箭頭。

2. (16 分) 令 $f(z)$ 為複係數多項式

$$(6 + 8i)z^4 + (24 + 37i)z^3 + (36 + 63i)z^2 + (24 + 47i)z + 7 + 14i.$$

請找一個具體的複數 z ，使得 $|f(z)| < |f(-1)|$ 。

(Hint: 令 $g(w)$ 為以 w 為變數的多項式 $f(-1 + w)$ ；明確寫出 $g(w)$ 並比較 $|g(w)| = |f(-1 + w)| = |f(z)|$ 與 $|g(0)| = |f(-1)|$ 的大小。正確計算 $g(w)$ 很重要，請小心驗算。)