國立臺灣大學數學系104學年度大學「個人申請」入學

第二階段筆試試卷試題一

2015年4月11日上午

- **試題總共一頁四大題, 請將詳細答題過程寫在另發之答案本上。**
- **閱卷會依答題狀況給予部分分數, 請盡量答題, 呈現你對問題的理解程度。**
- **考試不准使用計算機或任何3C 產品。**

(1) 假設 m, n 為兩自然數。

(a) 詳細證明 m 和 n 的最大公因數等於 m 和 $m+n$ 的最大公因數。

(b) 如果 $m > n$ 且 $m = nq + r$, 其中 $0 \le r < n$, 證明 m 和 n 的最大公因數等於 n 和 r 的最大公因數。

(c) (續上小題) m 和 n 的最大公因數也等於 m 和 r 的最大公因數嗎? 如果是, 請證明; 如果不是, 請舉例。

(2) 如果 $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, 則

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} = \sqrt{24} \Rightarrow (x^2-5)^2 = 24 \Rightarrow (x^2-5)^2 - 24 = 0$$

假設 $f(x)$ 是一個滿足 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$的整係數多項式, 求證 $(x^2-5)^2 - 24$ 是 $f(x)$ 的因式。

(3) 考慮橢圓 $x^2 + 4y^2 = 1$, $P(\alpha, \beta)$ 為其上一點。已知過 (α, β) 點的切線方程式為 $\alpha x + 4\beta y = 1$ 。

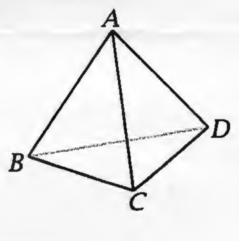
(a) 求過 P 點之橢圓外切矩形面積 (將答案表成 β 的函數)。

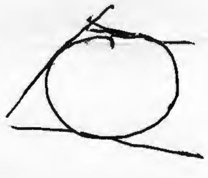
(b) 這個橢圓的所有外切矩形中, 哪個面積最大? 哪個最小?

(4) 如圖, 有一個四面體$ABCD$。有一隻螞蟻從A出發, 沿著正四面體的稜邊移動, 每到達一個頂點, 就隨機選擇一條稜邊繼續移動 (也就是機率各是$\frac{1}{3}$)。回答下列問題:

(a) 計算螞蟻在走過 n 條稜邊後, 回到A點的機率 P_n, 例如 $P_0 = 1$, $P_1 = 0$,$P_2 = \frac{1}{3}$ 。

(b) 求 $\lim_{n\to\infty} P_n$ 。





國立臺灣大學數學系104學年度大學「個人申請」入學

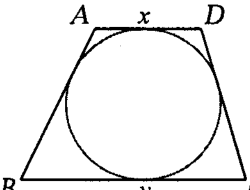
第二階段筆試試卷試題二

2015年4月11日下午

- **試題總共兩頁四大題請盡量答題, 請將詳細答題過程寫在另發之答案本上。**
- **閱卷會依答題狀況給予部分分數, 請盡量答題, 呈現你對問題的理解程度。**
- **考試不准使用計算機或任何3C 產品。**

(1) 如下圖, 有一梯形$ABCD$外切於一圓O, 設上底$\overline{AD}$長爲 x, 下底$\overline{BC}$長爲 y, 求證

$$\frac{x}{y} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$



(2) 定義 $(f\circ g)(x)$ 表示合成函數 $f(g(x))$, $(f\circ g\circ h)(x)$ 表示合成函數 $f(g(h(x)))$。另定義 $(f\cdot g)(x)$ 表示函數乘積 $f(x)\cdot g(x))$, $(f\cdot g\cdot h)(x)$ 表示 $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$。例如設 $f(x)=3x$, $g(x)=x+1$, $h(x)=x^2$, 則 $(f\circ g\circ h)(x)=3x^2+3$; $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=3x^4+3x^3$ 。
現已知有一非常數的多項式$f(x)$ 滿足自我合成 n 次等於自我相乘 n 次。

$$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x) = (f\cdot f\cdot\ \ \cdots\ \ \cdot f)(x)$$

求出所有可能的 $f(x)$ 及 n 。

(3) 令S爲三度空間中以原點O爲球心, 以1爲半徑的球面。若給定S上的兩個點A與B, 則通過球心O與點A、B的平面會與球面S相交於一 (半徑爲1的) 圓, 我們以$\widehat{AB}$記此圓上連接A與B的兩弧中其弧長不大於π者。

今令C爲三度空間中以直線$x=\frac{1}{2}, y=0$爲軸線,$\frac{1}{2}$爲半徑的圓柱面, 並將C與S所截出的圖形在上半空間$z\geq 0$中的部分記爲L 。

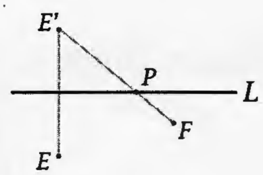
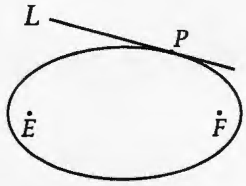
(1) L是否完全坐落在空間中的某個平面中? 請說明理由。

(2) 令$A=(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)$。若$B$爲$L$上一點, 請問$\cos\widehat{AB}$的最大值?(這裡用長度$\widehat{AB}$表示具同弳度數值的角度。例如, 若$\widehat{AB}=\frac{\pi}{3}$, 則$\cos\widehat{AB}=\frac{1}{2}$。)

(3) 令$A=(\frac{-1}{2},0,\frac{-\sqrt{3}}{2})$。若$B$爲$L$上一點, 請問$\widehat{AB}$的最小值?

(下頁尚有試題!)

(4) 請先閱讀下面這段文字, 再利用其中的敍述完成底下問題的證明, 如果你有別的辦法證明, 也可直接寫出, 但論證務必完整。

> 如下左圖, 在平面上有一直線L與在L同側的兩點E和F。如果要在L上找一點P, 使$\overline{EP}+\overline{FP}$是最小值, 則可利用下列辦法: 對$L$取$E$的鏡射點$E'$, 即$L$ 爲$\overline{EE'}$的中垂線 (垂直平分線), $\overline{E'F}$交L於P, 則P點即爲所求。
>
> 
>
>
> 
>
>
> 如上右圖, 有一焦點爲E和F的橢圓。P 爲橢圓上任一非長軸端點的點, L是過點P的切線。已知 E、F、P和L的關係必和前圖所顯示的一樣。

請回答下述問題: 如右圖, 有一半長軸爲 a 的橢圓, 其焦點爲E和F, 設O爲橢圓中心, 且圓O的半徑爲a 。若 P 爲橢圓上任一非長軸端點的點, 過P作橢圓之切線L, L交圓O於Q點, 其中 $\overline{EQ} \leq \overline{FQ}$。求證直線$QE$垂直於$L$ 。