國立臺灣大學數學系 103 學年度大學「個人申請」入學

第二階段筆試試題一

- 不准使用計算機　　2014 年 3 月 29 日上午 9:00 ～ 11:00

“總共四大題，請儘量答題，通常會依答題的狀況給予部份分數。”

1. (20%) 在袋中有 N 張分別標有號碼 $1,\ 2,\ \cdots, N$ 的紙牌，今用兩種抽樣方法，隨機從袋中抽出 n 個號碼，其中$n \le N$。抽樣方法如下：

方法一： 每次抽一張紙牌，記錄號碼後，放回袋中，然後再抽下一張，如此繼續，依序得到號碼 $Y_1,\ \cdots, Y_n$。

方法二： 每次抽一張紙牌，記錄號碼，該張紙牌不再放回袋中，如此繼續，依序得到號碼 $Y_1,\ \cdots, Y_n$。

問題一： 若 $1 \le a_1 \le N,\ 1 \le a_2 \le N,\ \cdots,\ 1 \le a_n \le N$ 且 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 不一定完全相異，請針對方法一及方法二，分別計算條件機率

$$P\left(Y_j = a_j \mid Y_1 = a_1,\ \cdots,\ Y_{j-1} = a_{j-1}\right),$$

其中 $2 \le j \le n$。

問題二： 若 $1 \le a \le N$，請針對方法一及方法二証明 $P(Y_j = a) = \dfrac{1}{N}$，其中 $1 \le j \le n$。

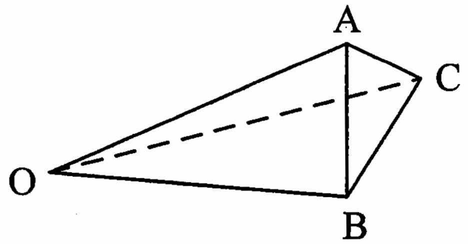
2. (25%) 如示意圖，有一個四面體，$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1,\ \angle CBA,\ \angle ACB$ 均為銳角，並且滿足

(1) $\angle BOC = 45^\circ$；

(2) $\angle AOB = 30^\circ$；

(3) 平面 ABO 和平面 CBO 所夾的平面角(或稱兩面角、二面角)為 60°，

求此四面體的體積。(需寫出計算過程，否則將予扣分)



3. (25%) 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為一個實數數列且滿足 $a_1 = 5,\ a_2 = 19$ 及遞迴關係式 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ $(n \ge 3)$。求一般項 a_n 的通式。(需詳細說明求解過程)

4. (30%) 如果多項式 $f(x)$ 可以分解為 $(x-\alpha)^k g(x)$，其中 α 為常數, $k \geq 2$, $g(x)$ 是一個多項式並且 $g(\alpha) \neq 0$，則稱 α 是 $f(x)$ 的一個 k 重根。下文中，$f'(x)$ 代表 $f(x)$ 對 x 的微分(或導函數)，請回答下列問題：

(1) 如果 α 是 $f(x)$ 的一個 k 重根且 $k \geq 2$，則 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的公因式，試証之。

(2) 假設 $f(x)$ 是一個首項係數為 1 的整係數四次多項式，請分別証明下列敘述。

(a) 如果 α 是 $f(x)$ 的 4 重根，則 α 為整數。

(b) 如果 α 是 $f(x)$ 的 3 重根，則 α 為整數。

國立臺灣大學數學系 103 學年度大學「個人申請」入學

第二階段筆試試題二

2014 年 3 月 29 日下午 2:00 ～ 4:00

- 不准使用計算機

“總共四大題，請儘量答題，通常會依答題的狀況給予部份分數。”

1. (25%) 設 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是正實數。試証 $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，而且等號在 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 時才成立。(提示：可以嘗試先證明 “當 $n=2^m$ 時的情形”。)

2. (25%) 假設在 x-z 平面上有一向量 $\overrightarrow{V}=(a,0,c),\ a>0$，

   在 y-z 平面上有一向量 $\overrightarrow{W}=(0,\beta,r),\ \beta>0$，

   (1) 求 $\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{W}$。

   (2) 設 $(0,0,0),\ (a,0,c),\ (0,\beta,r)$ 三點所成的平面為 P，並設平面 P 與 x-z 平面的夾角為 A，平面 P 與 y-z 平面的夾角為 B。求証 $A+B>90°$。

3. (20%) 箱中有 25 顆紅球及 75 顆黑球且每顆球被抽取之機會一樣。今重複從箱中抽取一球再放回箱中並記錄其顏色，請回答下列問題。

   (1) 令 X 代表紅球首次出現所需抽取的次數，對於任意自然數 $k,\ m$，試證明 $P(X>m+k-1\mid X>m-1)=P(X>k)$。

   (2) 令 Y 代表紅球出現第 r 次所需抽取的次數，其中 r 為自然數，求 $P(Y=y)$ 的機率值，其中 y 為大於或等於 r 的自然數。

4. (30%) 設 $z=\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$。

   (1) 證明 $z,\ z^2,\ \cdots,\ z^{16}$ 為方程式 $x^{16}+x^{15}+\cdots+x^2+x+1=0$ 的所有根。

   (2) 驗證以下兩個集合相等：

   $$\{z,\ z^3,\ z^{3^2},\ z^{3^3},\ \cdots,\ z^{3^{14}},\ z^{3^{15}}\}$$
   $$=\{z,\ z^3,\ z^9,\ z^{10},\ z^{13},\ z^5,\ z^{15},\ z^{11},\ z^{16},\ z^{14},\ z^8,\ z^7,\ z^4,\ z^{12},\ z^2,\ z^6\}。$$

   (3) 設 $\begin{cases} u_1=z+z^{3^2}+z^{3^4}+\cdots+z^{3^{14}} \\ u_2=z^3+z^{3^3}+z^{3^5}+\cdots+z^{3^{15}} \end{cases}$，證明 $u_1,\ u_2$ 為方程式 $x^2+x-4=0$ 之兩根。

   (4) 設 $\begin{cases} w_1=z+z^{3^4}+z^{3^8}+z^{3^{12}} \\ w_2=z^3+z^{3^5}+z^{3^9}+z^{3^{13}} \\ w_3=z^{3^2}+z^{3^6}+z^{3^{10}}+z^{3^{14}} \\ w_4=z^{3^3}+z^{3^7}+z^{3^{11}}+z^{3^{15}} \end{cases}$，證明 $\begin{cases} w_1,\ w_3 \text{ 為方程式 } x^2-u_1x-1=0 \text{ 之兩根。} \\ w_2,\ w_4 \text{ 為方程式 } x^2-u_2x-1=0 \text{ 之兩根。} \end{cases}$

   (5) 證明 $2\cos\dfrac{2\pi}{17}$ 為方程式 $x^2-w_1x+w_2=0$ 之一根。因此可導出 $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ 的值。