國立臺灣大學數學系102學年度學士班甄選入學個人申請

第二階段筆試一試題

2013年3月30日(六)上午9：00 − 11：00

- 試題共四大題，每大題 25 分，滿分 100 分。
- 本試題卷可供草稿使用，但答案連同詳細之演算或證明過程務必寫在答案卷本上，並於答案卷本之題號欄標明題號(一、, ⋯)與子題號((1)、⋯)，否則將予扣分。
- 不准使用計算機；除作圖外，限用藍色或黑色筆作答。

一、 設 $a_1 = 9$ 且當 $n \geq 2$ 時 $a_n = 9^{a_{n-1}}$，試求 a_{102} 的末兩位數字。

二、 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 且 $f(p-1) = 11, f(p) = 27, f(p+1) = 79$，其中 $p > 1$。已知當 $p-1 \leq x \leq p+1$ 時，$f(x) \geq 0$。試求由曲線 $y = f(x)$ 及直線 $y = 0, x = p-1, x = p+1$ 所圍區域的面積。

三、 某社區委員會根據其章程推選社區委員若干名，該社區住戶代表共 171 人，被推薦人獲得 57 票同意票，方能出任社區委員。當該社區住戶代表僅 141 人參與投票，若某被推薦人所得到「同意票」及「非同意票」的票數分別為 84 張及 57 張。開票時，當使用簡單隨機抽樣的方式，每次從票櫃中取出一張，當該被推薦人「同意票」票數達到 57 張時，將票櫃內未開票的張數記為 X。

(1) 試列出隨機變數 X 的所有可能取值。

(2) 試導出隨機變數 X 的機率質量函數。

四、 坐標平面上有四點，$A(1,0)$、$B(-1,0)$、$C(0,1)$、$D(0,-1)$。令 F_{AB} 代表所有落在坐標平面的點與 A及B 兩點的距離和為 $2\sqrt{2}$ 的集合，令 F_{CD} 代表所有落在坐標平面的點與 C及D 兩點的距離和為 $2\sqrt{2}$ 的集合。

(1) 試寫出 F_{AB} 的方程式。

(2) 以原點 $(0,0)$ 為起點的射線，交 F_{AB} 於 P 點，交 F_{CD} 於 Q 點。試求 $\overline{PQ}$ 的最大值及最小值。

國立臺灣大學數學系102學年度學士班甄選入學個人申請

第二階段筆試二試題

2013年3月30日(六)下午2：00 – 4：00

- 試題共四大題，每大題 25 分，滿分 100 分。
- 本試題卷可供草稿使用，但答案連同詳細之演算或證明過程務必寫在答案卷本上， 並於答案卷本之題號欄標明題號(一、...)與子題號((1)、,$\cdots$)，否則將予扣分。
- 不准使用計算機；除作圖外，限用藍色或黑色筆作答。

一、 當 $x^2+y^2 \le 1$ 時，試求 x^2y-y^2x 的最大值，並證明其為最大值。

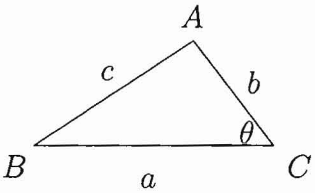
二、 考慮二次函數 $f(x)=x^2-5x+6$，以及數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，其中 $a_1=0$，而且當 $n\ge 1$ 時，a_{n+1} 是滿足 $f(a_{n+1})\le a_n$ 的最大數。證明 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，並求其值。

三、 以 a_n 表示用 1 和 2 組成、至少有兩個相鄰的位碼同時為 1 的 n 位自然數的個數；而 b_n 表示用 1 和 0 組成、至少有兩個相鄰的位碼同時為 1 的 n 位自然數的個數。例如，$a_3=3$ 因為只有 $112,211,111$ 三個這樣的數；但 $b_3=2$ 因為只有 110 和 111 兩種這樣的數，注意的是 011 並不是。

(1) 寫出 a_n 之間的遞迴關係式。(但不必求遞迴關係式的解)

(2) 用 a_n 的答案表示 b_n 的答案。

四、 如圖， $\triangle ABC$中，$\angle ACB=\theta$，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$， $\overline{CA}=b$。



(1) 試證存在 $0<t<1$ (t 以 a,b,c 的式子表達)，使得

$$\frac{1-t^2}{a}=\frac{2t-2t^2\cos\theta}{b}=\frac{1+t^2-2t\cos\theta}{c}.$$

[提示：考慮$(1-t^2)+(1+t^2-2t\cos\theta)$。]

(2) 若 a,b,c 皆為正整數，試證存在二正整數 $m>n>0$，使得

$$\frac{m^2-n^2}{a}=\frac{2mn-2n^2\cos\theta}{b}=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{c}.$$

(3) 試求二正整數 p,q 使得 $r=\sqrt{p^2+q^2+\frac{11}{10}pq}$ 也是正整數。