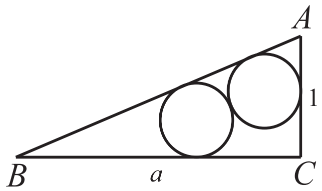
國立台灣大學數學系 101 學年度學士班甄選入學

第二階段〈筆試一〉試題

2012 年 3 月 31 日上午 9:00-11:00

- ▶ **試題共四大題，每大題 25 分，滿分 100 分。**
- ▶ **本試題卷可供草稿使用，但答案連同詳細之演算或證明過程務必寫在試卷本上，並於題號欄標明題號(1.、…)與子題號(A.、…)，否則將予扣分。**
- ▶ **不准使用計算機；除作圖外，限用藍色或黑色筆作答。**

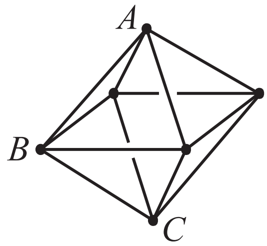
1. 如右圖，平面上有一直角三角形ΔABC，$\angle C$ 爲直角，且 $\overline{AC}=1$、$\overline{BC}=a$，將兩半徑相等的圓置於ΔABC 內部，並如圖與各邊相切，而且兩圓亦相切。求此圓的半徑長。



2. 若(x, y)在圓$(x-1)^2+(y-2)^2=5$上，且(x, y)非原點。試描述所有複數點$z=\dfrac{20}{x+yi}$的軌跡，其中$i=\sqrt{-1}$。

3. 函數$f(x)=\dfrac{1}{x^2+12}$。在$y=f(x)$的函數曲線上選擇相異兩點$A(2, f(2))$和$B(b, f(b))$，作過A、B的直線，並令其方程式爲$y=mx+k$。
   A. 若$b>2$，對任何x且$2<x<b$，$mx+k>f(x)$是否一定成立？證明你的答案。
   B. 是否存在$b<2$，使得對所有$x\le 2$，$mx+k\le f(x)$都成立？證明你的答案。

4. 如右圖，有一正八面體的骨架。假設從任一頂點出發走 1 步，可以走到相鄰的頂點，且從任一頂點走向各相鄰頂點的機率都是$\dfrac{1}{4}$。現從A點出發，試分別求出走了n步之後，會走到A點、B點或C點的機率。(用n的式子表示這三項機率)



國立台灣大學數學系 101 學年度學士班甄選入學

第二階段〈筆試二〉試題

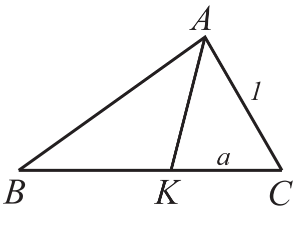
2012 年 3 月 31 日下午 2:00-4:00

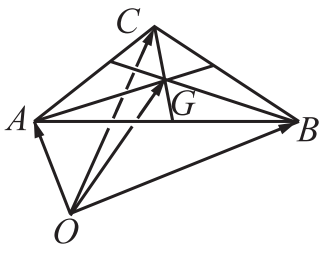
- 試題共四大題，第四題在背面，每大題 25 分，滿分 100 分。
- 本試題卷可供草稿使用，但答案連同詳細之演算或證明過程務必寫在試卷本上，並於題號欄標明題號(1.、…)與子題號(A.、…)，否則將予扣分。
- 不准使用計算機；除作圖外，限用藍色或黑色筆作答。

1. 如下左圖，在ΔABC中，$\angle C = 60^\circ$，K 爲$\overline{BC}$上一點，且$\angle BAK = \angle CAK$。設$\overline{AC} = 1$，$\overline{KC} = a$，

   A. 試以 a 的式子表示$\overline{BC}$長。

   B. 是否存在一個三角形，其中一角爲60°，且其各邊爲相異正整數？證明你的答案。





2. 如上右圖，空間中有一三角形ΔABC，令$\overline{BC} = a$、$\overline{CA} = b$、$\overline{AB} = c$。設

$$\overrightarrow{OG} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$$

   其中 O 爲原點，G 爲ΔABC之內心（三角平分線的交點）。從 SSS 全等性質知道三邊決定三角形的性質，試用 a、b、c 表示α、β、γ。

3. 考慮三次方程式$x^3 + 3ax + 2a = 0$，其中 a 爲一實數參數。試就 a 可能的取值範圍，討論此方程式根的特性（包括實根數目，正負根數目、重根數目）。

（背面尚有第 4.題）

4. 請仔細閱讀，並回答文中方格內的問題。

一組<u>彼此互異</u>的正整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 構成一個正整數<u>集合</u> A：

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

我們用 $|A|$ 表示集合 A 中元素的數目。舉例來說，如果 $A = \{2,5\}$，則 $|A| = 2$。

現在考慮兩個正整數集合 A 和 B，並利用 A 中元素與 B 中元素的和，定義一個新集合 $A+B$。例如若 $A = \{2,5\}$，$B = \{1,4\}$，由於

$2+1=3$

$2+4=5+1=6$

$5+4=9$

因此 $A+B = \{3,6,9\}$，其中 6 雖然有兩種加法組合，但只算成一個元素。

若以 $\max(a,b)$ 表示 a 和 b 中比較大的數，例如 $\max(3,2)=3$，$\max(4,4)=4$。

A. 請證明下列不等式：

$$\max(|A|,|B|) \le |A+B| \le |A| \cdot |B|$$

現在取定一個正整數 n，對任意兩個具有 n 個正整數元素的集合 A 和 B，取它們的和 $A+B$，然後將所有可能的 $|A+B|$ 收集起來，構成一個新的集合 $\mathbf{S}_n$。譬如很容易就可以驗證 $\mathbf{S}_1 = \{1\}$。而由下面的例子

$\{1,2\} + \{1,2\} = \{2,3,4\}$，$|\{2,3,4\}| = 3$

$\{1,2\} + \{1,3\} = \{2,3,4,5\}$，$|\{2,3,4,5\}| = 4$

可知 3 和 4 都是 $\mathbf{S}_2$ 中的元素。事實上 $\mathbf{S}_2 = \{3,4\}$（你將在題 C.中證明）。

B. 對任意正整數 n，請決定 $\mathbf{S}_n$ 中的最小元素和最大元素，並證明之。

C. 對任意正整數 n，請決定 $\mathbf{S}_n$ 與 $|\mathbf{S}_n|$，並證明之。