

國立臺灣大學數學系 100 學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題一 2011年四月二日上午9:00-11:00

不得使用計算機

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫，試題共四大題，每題各佔 25%。

1. (25分) 已知 x, y, z 是三個 1 到 9 的自然數，若能適當的在 x, y 之間及 y, z 之間插入加減號，使得運算結果為 10，則將該組 (x, y, z) 納入三碼數字王題庫，試求三碼數字王題庫內共有多少組 (x, y, z) 。例如 $(8, 3, 5)$ 可納入三碼數字王題庫，因 $8 - 3 + 5 = 10$ 。但 $(8, 3, 4)$ 則不納入題庫，因不可能找到加減號組合達到運算結果為 10。
2. (25分) 當 $y \geq \sum_{j=0}^{50} \frac{1}{2^{50-j}} |x - 2^j| + \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{2^j} |x - 2^{50+j}|$ 時，試求 $x + 2y$ 的最小值。
3. (a) (5分) 已知複數 $\omega = \cos(\pi/4) - i \sin(\pi/4) = (1-i)/\sqrt{2}$ ，試求直線 $\omega z + \overline{\omega z} = 2$ 的斜率。
(b) (10分) 二次曲線 $x^2 + axy + y^2 = 1$ ，其中 a 為實數。試求 a 的範圍，使得圖形為橢圓的充分且必要的條件。
(c) (10分) 在 (b) 小題中，若圖形為一橢圓且 $a > 0$ ，試求焦點坐標。
4. (a) (10分) 在上半空間夾角為鈍角的兩個向量，證明其在 xy 平面上的投影向量夾角仍為鈍角。
(b) (15分) 在空間中，證明不存在 5 個向量，使得任兩個向量的夾角皆為鈍角。

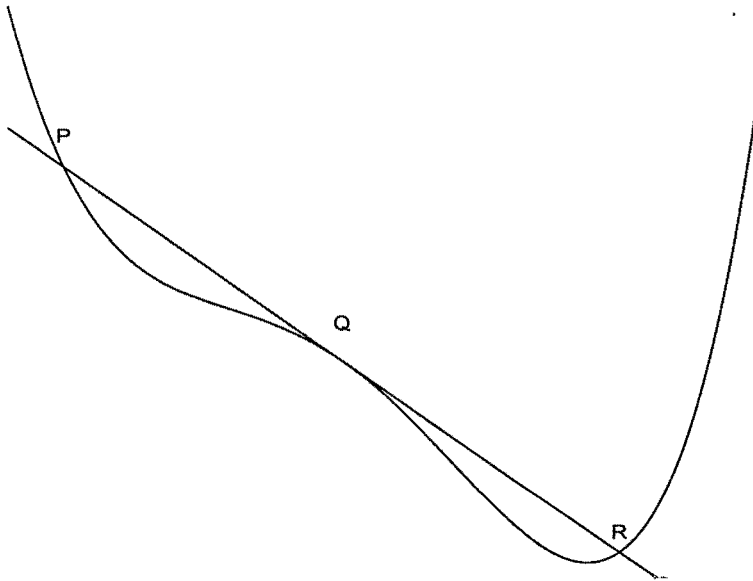
國立臺灣大學數學系 100 學年度學士班甄選入學

第二階段筆試試題二
2011年四月二日下午2:00-4:00

不得使用計算機

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫，試題共四大題，每題各佔 25%。

1. 令 $A = \{1, \dots, n\}$ 為由 1 到 n 的正整數所形成的集合，現由集合中移除一數 x 後，剩下的 $n - 1$ 個數字的平均數為 40.75。
 - (a) (10分) 試問 n 的最大值及最小值為何?
 - (b) (15分) 試問 x 的值為何?
2. 令 α, β, γ 為方程式 $x(x - 2)(3x - 7) = 2$ 的三相異實根，
 - (a) (15分) 試證 α, β, γ 皆為正數。
 - (b) (10分) 令 $\tan \theta_1 = \alpha$ ， $\tan \theta_2 = \beta$ ， $\tan \theta_3 = \gamma$ ，試求 $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ 。
3. (25分) 試求一直線 L 與曲線 $y = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 1$ 在某點 Q 相切又交於 P, R 兩點，且 Q 點恰為 \overline{PR} 之中點，如下示意圖。
(提示: 例如直線 $y = 0$ 與曲線 $y = x^4 - x^2$ 在點 $(0, 0)$ 相切，又交於另外兩點 $(1, 0)$ 及 $(-1, 0)$ ，且切點為兩交點之中點。)



第4題在背面

4. (25分) 如下圖所示，在邊長為 1 的正四面體 $ABCD$ 中內接一正立方體，其底面 $TUVW$ 落在三角形 BCD 上，邊 QR 落在三角形 ACD 上，頂點 P 落在三角形 ABC 上，頂點 S 落在三角形 ABD 上，試求該內接正立方體的邊長。

