臺灣大學數學系

九十學年度博士班入學考試題

機率

1.

X_n, X 爲定義於機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 之隨機變數，證明： $X_n \to X$ a.s.

$\Leftrightarrow P\{|X_n - X| \geq \epsilon \ i.o.\} = 0 \ \forall \epsilon > 0$.

2.

利用二項分佈與大數法則，證明：若 $f(x), x \in [0,1]$ 爲連續函數，則存在一列多項函數 $P_n(x)$，使 $P_n(x) \to f(x)$ unif x.

3.

令 μ_n 爲 R 上之一列 $Borel$ 機率測度，說明何謂 μ_n converges vaguely 與 μ_n converges weakly 。兩者之間蘊涵關係爲何？蘊涵即 imply。

4.

計算以 λ 爲參數之 Poison 分佈的特微函數，且利用其證明 Poison 收斂定理：
$S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}, \{X_{n,j}\}_{j=1}^{n}$ 爲獨立，且
$P\{X_{n,j} = 1\} = \lambda/n, P\{X_{n,j} = 0\} = 1 - \lambda/n$ ，則 $S_n \Rightarrow P(\lambda)$。" $\Rightarrow$" 分佈意味之收斂。

5.

令 $\Omega = [0,1]^2, P : Leb$測度。 $\mathcal{F}_n$：由 dyadic 方塊

$[i/2n, (i+1)/2n] \times [j/2n, (j+1)/2n], i, j,$ 所形成之 $\sigma-$代數，計算

$f_n = E[f|\mathcal{F}_n], \ f \in L^1(dp)$ ，何以 $f_n(x) \to f(x) \ a.e.x.$ 與 $L^1(dp)$？

6.

$\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ 爲 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上之一平賭，敘述一個充分必要條件，使，存在

$\{X_\infty, \mathcal{F}_\infty\}$ 使 $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$成一平賭。