臺灣大學數學系

八十九學年度博士班入學考試題

機率

以($\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}$) 表機率空間

(一)

機率測度與隨機變數的基本性質

(1)

只設$\mathcal{P}$只有``有限可加性''(finite additivity) 證明：$\mathcal{P}$爲機率測度(即$\mathcal{P}$有$\sigma-$可加性)，當$\mathcal{P}$有如下的連續性： $E_n \downarrow \phi \Longrightarrow$P$(E_n) \downarrow 0$.

(2)

設X, Y爲兩個(實值)隨機變數，定義於Ω上，$f(x,y)$爲 $R^2 \to R$的Borel可測函數，證明$f(X,Y)$亦爲隨機變數。

(二)

獨立性與獨立隨機序列

(1)

令$\{\mathcal{F}_n\}$爲$\mathcal{F}$的一個獨立子$\sigma-$代數，以 $\mathcal{F}'_n$表以$\{\mathcal{F}_k\}_{k\geq n}$所生成的子$\sigma-$代數(是以$\mathcal{F}'_1 \supset \mathcal{F}'_2 \supset \mathcal{F}'_3 \cdots$)。令 $A \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n$，證明或$P(A) = 0$或$P(A) = 1$.(兩者間恰有一成立)

(2)

令 $\{X_1, \cdots, X_n\}$爲獨立隨機序列,定義於Ω上，具有分佈函數 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 證明$X_1 + \cdots + X_n$之分佈函數爲 $F_1 * F_2 * \cdots * F_n$ ($*$表convolution)，(提示:只需考慮$n = 2$之情況，一般情況利用歸納法)

(三)

弱收斂與獨立隨機序列

(1)

如(二，2)，證明 $X_1 + \cdots + X_n$的特徵函數爲 $X_1, \cdots, X_n$之特徵函數 的相乘.

(2)

令μ_n爲X_n的機率分佈(爲R上的Borel測度)，稱μ_n弱收斂於某個R上之Borel機率測度爲μ，若

$$\int_{x\in R} f(x) d\mu_n(x) \to \int_{x\in R} f(x) d\mu(x)$$

對所有有界連續函數 $f(x)$ 都成立，令 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 爲獨立隨機序列，有相同機率分佈，且 $EX_n^2 < \infty, \forall n$. 利用(1)討論 $\frac{S_n}{n}$ 與 $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$，的弱收斂