

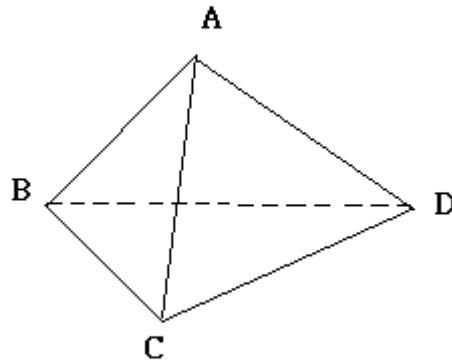
# 臺灣大學數學系

## 九十學年度博士班入學考試題

### 幾何

[\[回上頁\]](#)

1. 在  $R^3$  中取四個不共平面的點， $A, B, C, D$  將它們兩兩相連後得一圖形  $G$  (如圖)，其中  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AC}, \overline{BD}$  諸線段若相交，只交在  $A, B, C, D$  這四點中之一點。
- 求：
- (1)  $G$  的  $\pi_1$ , (first fundamental group)
  - (2)  $G$  的  $H_1$ , (first homology group)



2.  $R^3$  中一個旋轉面， $r, \theta$  是平面上的橫坐標  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = f(r), f$  可任意微分。請依序回答下列問題，並提供計算。
- (1)  $ds^2 = E dr^2 + 2F dr d\theta + G d\theta^2$ ，求  $E, F, G$ .
  - (2) 求  $\Gamma_{ij}^k$ .
  - (3) 請寫下測地線方程式。
  - (4) 請解測地線方程式。
  - (5)  $\theta = c$  (常數) 是否測地線？為什麼？
  - (6) 若  $\frac{dz}{dr} = \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r}$ ，求高斯曲率，根號中， $b$  為常數。

3.

曲面  $S, P \in S$ ，並設  $U$  是  $P$  的一個足夠小的鄰域。在此鄰域中，任兩點之間恰能被唯一的測地線相連並且自  $P$  出發，任意方向的測地線都存在於  $U$  中。今設  $S_\delta = \{q \in U \mid \text{自 } P \text{ 到 } Q \text{ 的測地線長為 } \delta\}, \delta > 0$ ，並且  $S_\delta \subset U$ ，當  $\delta$  足夠小時與  $S^1$  diffeomorphic。求證自  $p$  出發至  $q \in S_\delta$  長為  $\delta$  的測地線在  $q$  點與  $S_\delta$  垂直（ $\delta$  足夠小）。

[\[回上頁\]](#)