臺灣大學數學系

八十八學年度博士班入學考試題

幾何

任選四題

1. $D \equiv \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : D \to D$ 是連續映射 (continuous map). 證明存在 $p \in D$, 使得 $f(p) = p$.
2. S^2 是二維球面. 令 $T(S^2)$ 是 S^2 的切向量叢 (tangent bundle). 求同倫群 $\pi_i(T(S^2))$, $i = 1, 2, 3$.
3. 令 $Z(u, v) = \int^u \frac{dx}{\sqrt{f(x)-a}} \pm \int^v \frac{dy}{\sqrt{h(y)+a}}$, $g = (f(u) + h(v))(du^2 + dv^2)$, $f > 0$, $g > 0$. 證明 (1) 曲線 $f(u, v) =$ 常數, 是g的測地線. (2) 計算 g 的高斯曲率.
4. $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f : S^2 \to S^2$ 是光滑映射 (smooth map), $\vec{p} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (u, v, 0) \in T_p(S^2)$
   1. $df(\vec{v}) =$?
   2. 假設 $\forall x \in S^2$, $df : T_x(S^2) \to T_{f(x)}(S^2)$ 是同構 (Isomorphism), 試證： f 是可微分同胚 (diffeomorphism).
5. 試論述其真僞.
   1. 在 $T =$ torus 上, 存在度量 g, 使得高斯曲率 $K(x) \geq 0 \forall x \in T$, 且至少有一點 p, $K(p) > 0$.
   2. 在二維球面上的兩三角形 A_1, A_2 (三邊都是測地線) 的內角和可能不相等, 但二者都大於 $180°$.
   3. 所有可能的緊緻、無邊、可定向二維曲面都可拓樸同胚於 R^3 中的曲面; 但所有可能的緊緻、無邊、可定向二維黎曼流形則不一定可保距同構 (isometric) 於 R^3 中的曲面.
   4. S 是緊緻、無邊、可定向二維曲面, V 是 S 上的一向量場 (vector field), 假設 $V(x) \neq 0 \forall x \in S$. 則 S 的拓樸是 torus.