

臺灣大學數學系

八十七學年度碩士班甄試入學考試試題

線性代數

[\[回上頁\]](#)

甲組:

1. 設 A 為一個 $n \times m$ 實係數的矩陣，請問
 1. 什麼是 A 的列秩(row rank)，什麼是 A 的行秩(column rank)?
 2. 請證明 row rank=column rank。
2. 設 A 是一個 3×3 實係數矩陣
 1. 假設 A 的3個行向量(column vector)都是單位長並且兩兩互相垂直，求證 A 的3個列向量(row vector)也有同樣的性質。
 2. 如果更進一步假設 A 的行列式 = 1，求證當 A 看成是 R^3 的線性變換時， A 必是繞某一根軸的轉動。
3. 設 A 是一個 $n \times n$ 有理係數的矩陣，並且假設 A 的固有值(eigenvalue，指 A 的 characteristic polynomial的根)都是有理數。求證，存在一個有理係數的矩陣 B ，使得 $B^{-1}AB$ 形如

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ & \ddots & * & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \cdot \end{pmatrix}$$

即在主對角線的左下方全部是0.

乙組:

1. Let

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1. What are the eigenvalues of A^{30} and what is the determinant of A^{30} ?
 2. What is A^{30} itself?
2. For which values (a, b, c) does the equation

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

have a solution with $x + y + z = 0$? Here x, y, z, a, b, c are real numbers.

3. Which real 2×2 matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

are similar to an orthogonal matrix?

[\[回上頁\]](#)