

臺灣大學數學系

八十六學年度碩士班甄試入學考試試題

線性代數

[\[回上頁\]](#)

甲組4選3，乙組4選2

1.

解方程組

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z - 5u = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ -y - z + u = 1 \\ x - 2y - 2z + u = 0 \end{cases}$$

2.

設 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a)

求 T 使得 $T^{-1}AT$ 為對角化矩陣

(b)

求 e^A

3.

設 A 為一個 $n \times n$ 以實數為分量的矩陣，且其特徵值(eigenvalues)皆為實數。證明存在一 orthogonal 矩陣 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\text{upper triangular})$$

令 $V = \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n \text{ times}} \subset W = \underbrace{C \oplus \cdots \oplus C}_{n \text{ times}}$

如果 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in C$, 令 $\bar{\mathbf{w}} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ (complex conjugate)

如果 V' 為 V 的一個 R -線性子空間，則令 V'_C 為 V' 在 W 中所張出的 C -線性子空間。假設 W' 為 W 的一個 C -線性子空間。

證明：存在一個 V 的 R -線性子空間 V' 使得 $W' = V'_C$ 的充要條件是

$$“w \in W' \Leftrightarrow \bar{w} \in W'”.$$