臺灣大學數學系
14 九十一學年度第一學期碩士班甄試入學試題
高等微積分
December 7, 2001

1.

判斷下列各敘述是否正確，並評述其理由。

(a) $a_n > 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ (6分)

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ 則 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{2^n}$ (6分)

(c) 瑕積分 $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x} dx$ 收斂 (6分)

(d) 設 $Q = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$爲(0,1)上所有的有理數，任予 $\varepsilon > 0$ 令

$I_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$, 因Q在（0,1）上稠密，故 $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (7分)

2.

(a) $\alpha > 0$, 試證 $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ 在 $[0, \alpha]$ 上均勻收斂到e^x 。 (10分)

(b) 求 $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$之値， 並詳述理由。 (10分)

3.

f在$[0,1]$上連續，求 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$ 之値，並詳述理由。 (10分)

4.

設 $U \subset \mathbb{R}^3$ 爲一 Open, bounded domain with smooth boundary S （開且有界的區域，其邊緣是一平清的曲面S） 設 (n_1, n_2, n_3) 是S的（單位長）指向外的法向量，(x, y, z) 表 $\mathbb{R}^3$的坐標。求 $\int_s (x^2 + y)n_3 dA$, 其中dA 是S的area elemen $+(\int_s dA$ 表S的面積） 需說明計算過程.(10分)

5.

$f(x, y) = x^2 + y^2$

A爲平面上，由曲線 $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2, xy = 1$ 及 $xy = 2$ 所界定，且座落在第一象限之區域。

求 $\int\int_A f(x, y) dx dy$ 。 (15分)

6.

$f(x) = x + x^2, -\pi \le x \le \pi$

(a) 求f 的Fourier 級數。 (10分)

(b) 利用(a)求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 之值。 (10分)