臺灣大學數學系

九十一學年度第一學期碩博士班資格考試題

機率 (Probability)

Sept 11, 2002

以下五題，每題20分

(一)

(1)

寫下三事件，為兩兩獨立（pairwise independent），但三事件不獨立。

(2)

X, Y 為Gamma分佈,分別為G(α,λ),G(β,λ),且 X, Y 獨立,求 $X+Y$ 之分佈.

註：G(α,λ)分佈之機率密度函數為 $f(x)=\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}/\Gamma(x)\cdot 1_{\{x\geq 0\}}$

(二)

何謂階數為 n 之Berstein多項式？證明：任一 [0，1] 上之連續函數，可用一列Berstein多項式均勻逼近。

(三)

以 X_p 表現出正面機率為p之銅板過程中，首次出正面所須次數；證明：當 $p\to\infty$，p X_p 弱收斂到一個指數分佈。

(四)

已知 $\{X_n\}$ 為一平賭（martingale），a 為一常數，證明 $(X_n-a)^+$ 為一劣賭（submartingale），而 $X_n\wedge a$ 為一優賭（supermartingale）

(五)

令 $p(x,y)$ 為時間齊性（time homogeneous）， 離散值的Markov鏈的遷移機率（transition probability）， 何謂一機率 $\mu(x)$ 為過程的平穩分佈（stationary distribution）？何謂 $\mu(x)$ 為過程的可逆機率測度（reversible measure）？何者較強？（寫下理由）