

臺灣大學數學系

八十九學年度第一學期碩博士班資格考試試題

幾何

[\[回上頁\]](#)

1. 自行車之內胎爲一torus曲面, 拆除其內側之打氣孔, 形成一破洞, 此曲面之fundamental group π_1 (torus-small disc) 是否爲交換群? 若然, 此群是否爲 free abelian group? (25/100)

2. Riemannian metric $ds^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x dx + y dy)^2}{x^2 + y^2}$ ($x^2 + y^2 \neq 0$), $P=(1,0)$, $Q=(0,1)$ 由P點至Q點作平行移動, $\gamma_1 = \{(1-t, t) | 0 \leq t \leq 1\}$ 爲直線段, $\gamma_2 = \{(\cos t, \sin t) | 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ 爲圓弧, 沿此二路徑平行移動之結果相差若干? (25/100)

3. $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \text{curl} A = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ 若 $\text{div} \vec{B} = 0$, 則稱 \vec{B} 爲incompressible

vector field.

若 $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (-x^2 + yz, xy + z^2, xz - y^2)$, 則 \vec{B} 是否爲incompressible?

若然, $\vec{A} = (?, ?, ?)$ (25/100)

4. $\gamma = \{z = 2xy, x^2 + y^2 = 1\}$ 爲一空間曲線, $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) \in \gamma$, 在P點之torsion τ 是否爲零? 若然, 在P點之曲率 $\kappa = ?$ (25/100)

[\[回上頁\]](#)