臺灣大學數學系

九十學年度第二學期碩博士班資格考試試題

分析

以下

（一）至（五）爲實分析，選作四題，第（六）題爲複變。

（一）

若 f 爲Lebesgue可測，且 $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ 爲Lebesgue測度零。證明 g 也是Lebesgue可測。以上命題對Borel可測是否成立？說明理由。

（二）

已知 $\{f_n\}$ 在 $L^p(d\mu)$，$p > 1$，意味下趨近於 f，證明 $\{f_n\}$ 在測度意味下也 趨近於 f。

在此，f_n, f 在[0,1]上Lebesgue可測，而μ表[0,1]上之Lebesgue測度。

以上命題之逆是否仍成立？說明理由。

（三）

設 $f(x)$，$x \in [a, b]$ 爲有界變分函數(function of bounded variation)，證明 $f'(x)$ 存在，$a.e. x \in [a, b]$ 且證 $\int_a^b |f'(x)|dx \leq V_f[a, b]$。上式左項爲 $|f'(x)|$ 之 Lebesgue積分，右項爲 f 在 $[a, b]$ 上之全變分(total variation)。

（四）

同上，設 $f(x)$ 爲單調遞增，是否有 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$？說明理由。若否，說 明可使等號成立的一個充份必要條件。

（五）

若 $f \in L^2(0, 2\pi)$，證明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = 0$；

證明此對 $f \in L^1(0, 2\pi)$ 也成立。

（六）

利用Cauchy定理，關係式 $2i$ sin $z = e^{iz} - e^{-iz}$，$z \in \mathbb{C}$。

求以下極限：任一 $t \in \mathbb{R}$，$\lim\limits_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x} \ e^{ixt}dx$

提示：考慮 $\int_{\mu_A} \frac{e^{isz}}{z}dz$，$\mu_A$ 適當之圍道(contoar)。