臺灣大學數學系

八十七學年度第一學期碩博士班資格考試試題

代數

1. 在 S_5 中有無 order 爲 20 的元素? 試證之.
2. 證明 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 爲一 Euclidean domain.
3. 設 G 爲一 finite group 且 $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g\in G} a_g \cdot g : a_g \in \mathbb{Z}\}$. 現定義 $\mathbb{Z}[G]$ 中的加法及乘法如下:

   如果 $x = \displaystyle\sum_{g\in G} a_g \cdot g, y = \sum_{g\in G} b_g \cdot g$ 爲 $\mathbb{Z}[G]$ 中元素

   定義 $x + y = \displaystyle\sum_{g\in G} (a_g + b_g) \cdot g, x \cdot y = \sum_{g\in G} (\sum_{\substack{h_1 k\in G \\ h\cdot k=g}} a_k \cdot b_k) \cdot g$

    1. 證明 $(\mathbb{Z}[G], 0\mathrm{xA451}, \cdot)$ 成一 ring.
    2. 這個 ring 是否爲一 integral domain?
4. 求 $x^4 - 3$ over $\mathbb{Q}$ 的 Galois Group.
5. 設 N 爲一正整數
    1. 證明 $\frac{1}{N}$ 爲一循環小數
    2. 如果用以十爲底的記數法表示, N 爲一 k 位數, 且 N 與 10 互質, 證明 $\frac{1}{N}$ 的循環節至少爲 k 位.
6. (1)設 a, b, c 爲任意複數, 證明 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ 爲可對角化.

   (2)對任意 a, b, c, d, $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$ 是否必可對角化?
7. 求 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n / n!$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.
8. (1) 求 $\mathbb{Z} / (1998)$ 的所有 maximal ideals.

(2) 求 $\mathbb{Q}[x]\,/\,(x^{1998}-1)$ 的所有的 maximal ideals.