數學系課程簡介

特色

我們的特色就是「看到數字的圖畫，聽見幾何的樂音。」

「數」與「形」二字總括了數學的一切。打個比方，數字的規律和諧如音樂，幾何的多采美如繪畫。你可能會說：「那數學的特色應該是『聽到數字的樂音，看見幾何的圖畫』才對啊！」這正是重點；數學的發展從幾千年前直到今日，從研究單純的數字、具體的圖形開始，因為「數字」的意義愈來愈廣，許多東西都可以當作數字來「運算」，而「空間」的看法也愈來愈超越直覺，許多對象都可以當做圖形來「看」。這高度的抽象化是今日數學的圖騰，同時也蘊含了能帶著數學走向未來的發展、能用以攻克來自自然科學與應用學科的各個難關的巨大潛力

本系大學部的課程與訓練致力於培養學生的「基礎數學能力」，談論的對象既是數學理論研究的基本物件，又常是基礎科學與應用學科中處理許多問題極有威力的工具、許多現象的絕佳模型。「基礎數學能力」至少包括與以下幾類概念有關的知識，以及在具體情況下運用它們的能力：

(一)函數、方程式(等式)與估計(不等式)：探討各類方程式(如常微分與偏微分方程、代數方程等)的解的存在性、定性與定量性質；對於意義明確但未必能直接求得的量、函數，研究如何間接地理解、估計它們。

(二)抽象結構：了解具有某些抽象特性的各種結構，如結合運算(群)、乘積結構(環、體等)與線性結構(向量空間)的一般性質，並熟悉它們的各種具體實例。

(三)幾何概念：研究空間中幾何形體的局部與整體性質(如曲線/曲面的弧長/面積、彎曲率與拓樸特性，以及它們之間的關係)，並進而理解更高維度空間的幾何概念。

這些概念一直是數學的核心，更是各類科學應用中不可或缺的；同時，它們彼此間有許多交互作用。本系絕大部分的課程都與以上至少一項有關。基礎課程大略可分以下三類，每類均*列舉*幾門課簡介。

(A)分析學

(1) 微積分與分析導論：微積分是關於連續量如何變化的知識，始於古代人求切線與面積、理解天體運行的諸多努力，於 17 世紀由牛頓與萊布尼茲集先前知識之大成，開始有系統地研究。微積分研究函數的許多量化性質，是所有數學(如高維度幾何學、拓樸學與各類數學分析)與量化學問(如許多科學類與商管類的學問分支)的重要基石。分析導論是微積分的延伸，一方面提供微積分中諸多概念更嚴格的論證基礎，另一方面也將這些概念推廣到更抽象的對象，比如說一些常用的函數空間。

(2) 常微分方程與偏微分方程：微分方程式指的是一些函數(稱未知函數)的變數之各階變化率所滿足的某些數學等式。常微分方程指的是未知函數只有一個變數的情況，例如給定作用力，將物體的質心位置當作未知函數時，牛頓第二運動定律就是位置函數的二次變化率所滿足的常微分方程。亦可平行地考慮具單個複數變數的常微分方程，此時在複變數函數論(以下(3))的幫助下對方程的解有更精細的理論。至於描述熱傳導的熱方程、波傳遞的波方程等，其未知函數則有多個變數，屬於偏微分方程的範疇。除了某一類稱作橢圓類的偏微分方程有較完整的一般理論外，研究其他的偏微分方程時往往必須對其來源(幾何學、科學或應用學科的問題)的特性有較多的了解。在大學部的各種微分方程課程談論既有的一般理論，以及基礎實例的計算與論證。許多結構更複雜的，如描述時空重力的愛因斯坦方程、流體行為的 Navier-Stokes 方程等方程式則可能在進階的選修課(如微分幾何、數學流體力學)中被探討。

(3) -複分析導論：將複數引進微積分。複數特有的結構使我們能更深入地了解「解析函數」及相關微分方程的抽象特性，更提供了許多威力強大的計算工具。這些知識的主要研究大略從 19 世紀開始，在數學上的影響遍及數論、分析、代數與幾何，而且這些影響彼此交融，直到今日；在科學上，從古典的電磁學、流體力學起，今日更滲透科學與工程計算的各個角落。雖然部分其他學系也提供有關複變數函數論的課程，但多著重在計算層面，本系的複變特色在於強調抽象性質的理解，持更宏觀的角度取得理論與計算的平衡，更能因應各種變化。

(B) 代數學

(1) 線性代數：線性指的是「加」與「乘以數字」兩種概念的結合，廣泛地 出現在數學、自然科學、計算機科學、工程、商管等量化學問中。基礎的

線性代數探討向量空間(三度空間向量的推廣)的基本性質(基底、維度)與線性映射(它們的矩陣表達、秩、跡、核空間、行列式等基本性質、矩陣的抽象特性、各種特殊矩陣分解的抽象理解等等)。本系線性代數課程不限於矩陣的實際操作與數值計算,並強調抽象性質的理解與理論的建立,故能因應不同領域的應用。

(2) 代數：研究具運算結構的集合特有的性質。一般會先談論「群」的概念。群是一種帶有滿足結合律運算的集合,常體現在各種與對稱性有關的考量中,例如保持一個物體輪廓的剛體運動全體就是一個群的例子。許多我們熟悉的數字集合在普通的加法或乘法運算下也都是群的例子。

在可換群原有的運算(俗稱加法)基礎上，考慮另一個對其滿足分配律的運算(俗稱乘法)，就有了環的概念。

如果一個可換環中的非零元素對乘法都可逆,那麼就有了「體」的觀念，其系統性的發展始於 19 世紀關於代數方程式之解能否用係數的四則運算與根式表達的問題,當時的大突破來自偉大的法國數學家伽羅瓦(現稱伽羅瓦理論),在數系的擴充與群的子群之間建立起基礎的對應。此一理論已成為現代數論與代數幾何的最基本入門。

(C) 幾何學：

大學部幾何學：

首先研究平面上及空間中曲線的幾何性質,介紹曲率(彎曲程度)、扭率(非平面程度)以及 Frenet 標架 - 沿著曲線移動的一組特殊的基底向量，它反過來刻畫了該曲線在空間中的形狀。

接著討論空間中曲面的幾何性質，對於曲面上的一條曲線，考慮沿該曲線以單位速率移動，這時我們將在某點的加速度分別沿曲面的法線方向及切平面方向的投影，其分量分別稱為該曲線在該點相對於曲面的「法曲率」與「測地曲率」。一條測地曲率處處為 0 的曲線稱為該曲面上的一條「測地線」,視為「該曲面上真正的直線」。接著考慮曲面上所有通過該點的曲線，它們在該點的法曲率中最大與最小的可能合稱為曲面在該點的主曲率。最後，曲面一點的高斯曲率定為兩個主曲率的乘積。這些曲率反映了曲面上的曲線以及曲面本身的各種彎曲程度。

雖然高斯曲率的定義取決於曲面在空間中的形狀(因為用到了法向量等等),19 世紀由偉大的高斯所發現的一個結果說，高斯曲率只取決於「從曲面上任意一點走到任意的另一點的最短距離」這些資訊，除此之外與如何將曲面「放」在空間中的方式無關(高斯本人將此結果稱為「絕妙定理」)。 這說明高斯曲率所描述的「彎曲程度」是曲面局部的內在測距幾何特性。

此外，曲面的局部性質與其整體特性的關連也將被探討。我們將介紹歷

史上最早且影響深遠的一個結果 - 高斯-博內定理。此定理宣稱，對於三度空間中一個封閉的曲面，如果我們將表面塗上油漆，並且要求每個點油漆相對於面積的密度恰好等於在該點曲面的高斯曲率，那麼，所塗油漆的總質量為 $2\pi(2-2g)$，此處 g 為該曲面的「把手」個數，比方說球面的 g 為 0，甜甜圈表面的 g 為 1 等等。

曲面在空間中的幾何特性也是此課程的題材。我們稱一個局部達到面積最小的曲面為「極小曲面」。怎麼樣的曲面是極小曲面呢？將曲面上每個點的兩個主曲率的平均稱為在該點的「均曲率」。一個曲面是極小曲面等價於它在每個點的均曲率為 0。

除了以上這些基礎概念，本課程還著重實例的計算。許多幾何學及科學研究中常見的曲線與曲面都是我們的材料。此課程還是許多進階題材的入門。比如說，高斯的絕妙定理影響了黎曼在 19 世紀發展的高維度幾何學(微分幾何)，尤其是其中的曲率概念(現稱黎曼曲率張量)，現代拓樸學、許多物理分支甚至影像學科中的許多發展都由此而來。例如，黎曼理論創立 50 年後成為愛因斯坦能用以描述時空重力理論(廣義相對論)的工具。

核心課程

大學部

本系提供 4 年課程，學生修畢 128 學分可獲得理學士。學生除修畢「校訂全校性共同科目」(12 學分)及「通識教育課程」(至少 18 學分)與「系訂必修專業科目」(-63 學分)外，並應修滿與數學相關 12 學分的選修課程始可畢業。本系課程具多樣性，純數學與應用數學並重。常開設課程約五十門，詳見本系網頁：http://www.math.ntu.edu.tw/

系定必修專業科目

- 微積分（5,5）、分析導論（5,5）或分析（5,5）
- 線性代數（4,4）、代數導論（4,4）或代數（4,4）
- 常微分方程導論（4）、偏微分方程導論（4）
- 幾何學導論(4)或幾何學(4)、複分析導論(4) 或複分析(4)
- 計算機程式設計（3）、或科學計算導論(3)、計算數學導論(4)、機率導論(4)
- 由普通物理學甲上下、普通化學甲上下、普通生物學甲上下、經濟學原理與實習上下等課程中，至少修得 6 學分。