貓頭鷹計劃數論篇　謝銘倫教授採訪

代數數論起源是要研究有理系數(多變數)多項式的有理數解 。隨著時代發展，現在從事這方面研究需要三大工具：代數幾何、古典代數數論、自守表現論。我提供以前自己以前學習這些領域時一開始唸的一些基本書給同學做參考。但同學在唸個別重要定理的證明時，還是要在圖書館找不同的書看，因為不同的作者會有不同的切入觀點：

交換代數是代數幾何的基礎，像微積分之於微分幾何，就相當於交換代數之於代數幾何。以下是我以前剛學時念的書:

交換代數
Atiyah, Mcdonald: Introduction to Commutative Algebra
D. Eisenbud: Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry (GTM150)
H. Matusmura: Commutative Ring Theory

Atiyah 和 Eisenbud 的習題要全做，如果交換代數念了沒做習題完全等於沒念。要唸 Hartshorne 之前交換代數的程度大概 Eisenbud 唸一半就可以了（第 17 章 Koszul Complex）。至於 Matsumura 可以比較晚，不足再去補就好。

代數幾何
I. R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry I, II
R. Hartshorne: Algebraic Geometry
D. B. Mumford: The Red Book of Varieties and Schemes

Shafarevich 的書的風格感覺算是一本半古典的書，很值得唸。再來是 Hartshorne 的書，裡頭第一章以後用很多交換(同調)代數了。Grothendieck 版代數幾何原典的 EGA 和 SGA 其實蠻口語化，其實鼓勵有心的同學學習一點基本的法文直接唸原典。

而 Hartshorne 的書可以視為 EGA 的導覽。唸過 Shafarevich 書的同學可以從 Hartshorne 的第二章開始念，念到第四章的曲線論和第五章的曲面論，第三章的 Cohomology Theory 是研究代數幾何大域性質，與著重局部性質的交換代數都是很重要的工具。念代數幾何一開始會有心理上的障礙，但渡過之後一切都會很快。

Mumford 的書的好處是較多圖畫，我覺得可以幫助讓更人直觀了解 scheme 的語言。Shafarevich 的書比較具體。

代數數論
J. P. Serre: A course in Arithmetic
D. A. Marcus: Number Fields
Cassels and Fröhlich: Algebraic Number Theory

代數數論歷史相當悠久，但是第一本一定強烈推 Serre 的書。書中兩個部份一定要全部念懂、念通，其按照歷史的脈絡，寫得步調快卻不紊亂，相當清楚簡潔。第一個部份的最後定理是 Hasse-Minkowski 定理，是「二次方程式何時有有理數解」的重要判別法，也是代數數論的基本問題！定理的證明過程中，用到一個解析數論的 Dirichlete 質數分佈定理。這定理在書的第二部分用複變和 L-function 的方法證明。很妙的是 Hasse-Minkowski 的敘述是一個純代數定理，但卻一定要用到解析方法才能證的質數分佈定理。這是重要數論定理證明常常會出現的事。

再來是基礎的代數數論，Marcus 的書是我在大四時念的，只要有 Galois Theory 的基礎就可以念。這本書至少要把第 1 至 5 章（代數部份）念完，而 6、7、8 章較解析，有提到 L-function。等把習題做完，就可以讓 Galois Theory 的功力大幅提升，尤其是第四章的 38 道習題，全部完成後，也順便把 Kronecker-Weber 定理證完了（等於是證明 over Q 的 Abelian extension 的生成元都是由單位方根所組成）這定理是代數數論的重要的里程碑。

還有一本是 Cassels 和 Fröhlich 所編的 proceedings。念完這兩本之後對代數數論中最重要的基本理論 - - 類體論 (Class Field Theory)有初步的理解。這本 proceedings 裡有所有代數數論需要用到的工具：local field, global field, finite group, cohomology of groups 等，都有從基本的開始介紹。裡面最重要的三篇文章，(一)是 Serre 的 Local Class Field Theory，(二)是 Tate 的 Global Class Field Theory，可以學到各種處理 group cohomology 的技巧，(三)是在第 15 章 Tate 的博士論文。

自守表現論

G. Shimura: Introduction to Arithmetic Theory of Automorphic Functions
D. Bump: Automorphic Forms and Representations
F. Diamond, J. Shurman: A First Course in Modular Forms

Shimura 的書是本很難的經典，記號非常之多，但念完之後功力將上升好幾倍。最重要是第五章，證明 了 Main Theorem of Complex Multiplication，需要一點代數幾何(over finite field)的知識。第九章把 modular curve 推廣到 Shimura curve，一開始念會很痛苦，但只要撐過去對近世數論的理解會更上一層。

Bump 的書，為自守表現論的入門書(GL(2)的表現論)，建議先從第四章"representation theory of GL(2) over local fields" 開始唸。在此假設大家都已經要懂有限群的表現論，如果不會的話可以先念 Serre 的 Linear Representations of Finite Groups。

最後一本 Diamond-Shurman 的書雖然我自己沒有熟讀過，但還是推荐它，因為裡面有很多 connection，很多 modular form 和現代數論的關係，講了許多故事，知道基本術語後之後聽故事很重要。

以上，比較簡單的書有 Atiyah、Marcus、Serre，在大三大四的時候就可以把它念深入，對未來念研究所如果要走古典代數數論領域會有大幫助！