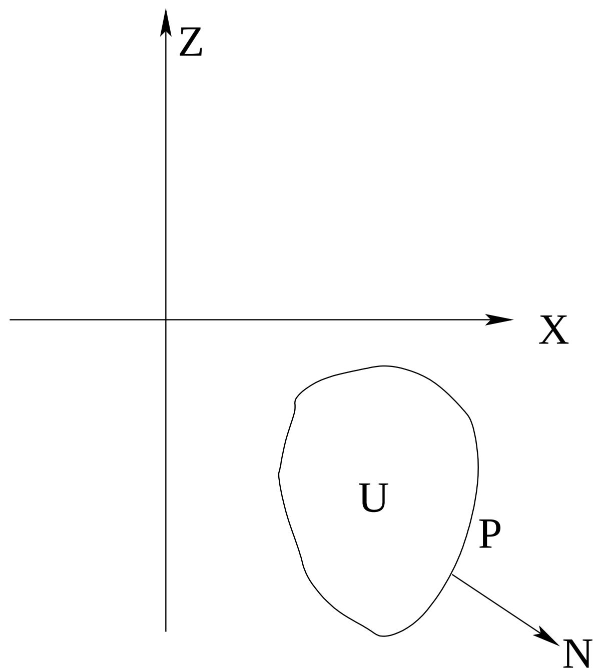
阿基米德原理

一個物體在水中所受到的浮力如何理解?



如圖, 以$X-Y$平面為液面, 其下有區域U, 假設U的邊緣是一個平滑的曲面S, P在S上, 從Pascal原理得知, P點所受的力是

$$(-Z)\cdot(-N)=Z\cdot N$$

其中Z是P點的Z座標, $N=(v_1,v_2,v_3)$是P點指向體U之外的單位長法向量. 把表面S所承受的壓力作一面積分, 以

$$\iint_S Z\cdot N dA$$

表示, 注意這是一個向量值的積分, dA是S的面積元素(area element)

我們可以利用Stokes定理來把上面這個面積分改寫成一個體積分 (定理: $\iint_S v_i\cdot f dA=\iiint_U f_{x_i}dx_1dx_2dx_3$)

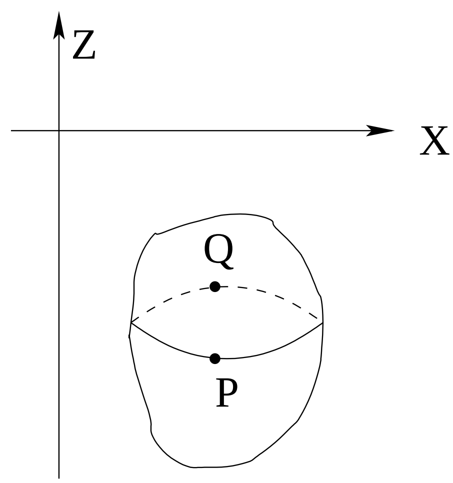
所以

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S Z \cdot N dA &= \iint Z(v_1, v_2, v_3) dA \\
&= (\iint z v_1 dA, \iint z v_2 dA, \iint z v_3 dA) \\
&= (\iiint \tfrac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3, \iiint \tfrac{\partial z}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3, \iiint \tfrac{\partial z}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3) \\
&= (0, 0, \iiint dx_1 dx_2 dx_3) \\
&= (0, 0, 1) \cdot \text{物體所佔的體積}
\end{aligned}
$$

這裡, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

我們也可以避開Stokes定理, 直接理解 $\iint\limits_S z \cdot N dA$.

由投影的觀點, $v_1 dA$, $v_2 dA$, $v_3 dA$分別是dA在 $y-z$平面, $x-z$平面, $x-y$平面的投影.
先看 $\iint z \cdot v_2 dA$

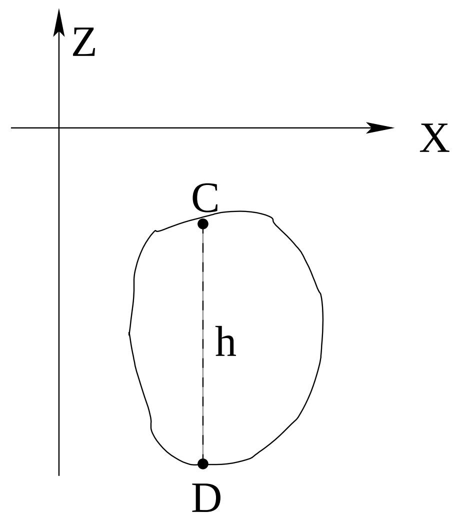


在曲面S上取一點P, 經P點沿y軸方向, 作一射線, 交S於另一點Q, 則P和Q的z坐標相等, 而$v_2 dA$的大小都是$dxdz$, 但是因為v_2 在P和Q的符號相反, 因此

$$
\begin{aligned}
v_2^P dA^P + v_2^Q dA^Q &= 0 \\
z^P v_2^P dA^P + z^Q v_2^Q dA^Q &= 0
\end{aligned}
$$

這裡證明了 $\iint z v_2 dA = 0$, 同理 $\iint z v_1 dA = 0$

再看 $\iint zv_3 dA$,



C點沿z軸的方向作一射線, 交S於另一點D, 在C和D, z坐標的差額是h, 再乘上$dxdy = v_3 dA$作積分, 就得到物體U的體積

附註: 施S表面的力對區域U的幾何中心(或U這塊水的質心)的總力矩也等於0, 即若將質心置於原點的話, 可以證得

$$\iint (x, y, z) \times zNdS = \overrightarrow{0}$$