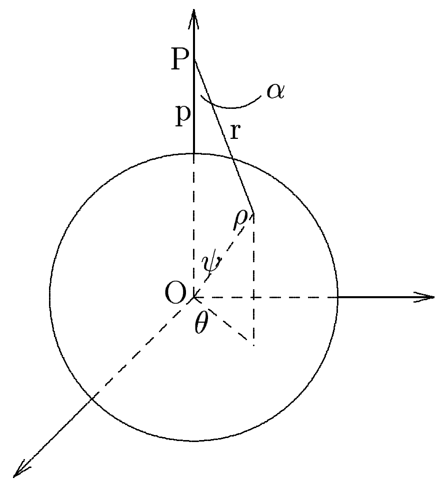
球體對一質點的引力

假設一半徑為R的球體, 其密度$f(\rho)$只與到球心O的距離ρ有關. 假設有一質點P的質量為m, 其到球心的距離為$p(>R)$, 則球的質量為 $M=\int_0^R 4\pi\rho^2 f(\rho)d\rho$, 而把質量集中在球心後對質點$P$的引力, 根據萬有引力定律且假設萬有引力常數(在適當的單位取法下)為1, 為$\frac{Mm}{p^2}$. Newton在考慮引力問題時, 所遇到的問題之一就是, 球體對質點的引力, 是否和質量全集中在球心後對質點的引力是相等的.



若質量不集中在球心, 用球坐標, 則球上一小體積 $\rho^2\sin\psi d\rho d\psi d\theta$對距離$r$處的質點$P$的引力在$OP$方向的分力為 (因為對稱的關係, 引力總和必在此方向)

$$\cos\alpha\frac{mf(\rho)}{r^2}\rho^2\sin\psi d\rho d\psi d\theta$$

所以整個球體對質點P的引力為

$$\begin{aligned}&\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos\alpha\tfrac{mf(\rho)}{r^2}\rho^2\sin\psi d\theta d\psi d\rho\\&=2\pi m\int_0^R\int_0^\pi\cos\alpha\tfrac{f(\rho)}{r^2}\rho^2\sin\psi d\psi d\rho\end{aligned}$$

α與r都和ψ, ρ有關, 所以該化成為它們的函數, 才能開始積分. 然而這樣的積分是積不出來的. 據說這是Newton遲遲未能發表萬有引力原理的一個原因.

Newton後來還是把問題解決了. 解決之道在於處理對ψ積分時(因此ρ不變), 把變數ψ及α都換成變數r, 而變成對r積分:

$$\cos\alpha=\frac{p^2+r^2-\rho^2}{2pr},2p\rho\cos\psi=p^2+\rho^2-r^2$$

由後一式得(對ψ積分時, ρ為常數)

$$2p\rho\sin\psi d\psi = 2rdr \Rightarrow \sin\psi d\psi = \frac{r}{p\rho}dr$$

將這式子代入積分式得

$$\begin{aligned}
& 2\pi m \textstyle\int_0^R \int_{p-\rho}^{p+\rho} \frac{p^2+r^2-\rho^2}{2pr}\frac{f(\rho)}{r^2}\frac{r}{p\rho}drd\rho \\
= & \textstyle\frac{\pi m}{p^2}\int_0^R \rho f(\rho)\int_{p-\rho}^{p+\rho}(1+\frac{p^2-\rho^2}{r^2})drd\rho \\
= & \textstyle\frac{\pi m}{p^2}\int_0^R \rho f(\rho)(r-\frac{p^2-\rho^2}{r})|_{p-\rho}^{p+\rho}d\rho \\
= & \textstyle\frac{m}{p^2}\int_0^R 4\pi\rho^2 f(\rho)d\rho \\
= & \textstyle\frac{Mm}{p^2}
\end{aligned}$$

(取材自曹亮吉主編微積分, 歐亞書局出版)
問題: 如果質點P在球的內部, 則結果如何?

(補充部份) 關於質點受到球體的重力, 若是以重積分計算時, 不妨設該點的位置在$(0,0,a)$. 球體球心在(0,0,0), 半徑為1. 重力只需考慮z軸方向, 大小是

$$\int \frac{\cos\theta - a}{((\cos\theta - a)^2 + \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta d\theta d\psi$$

ψ從0到2π是水平面上的輻角, θ從0到π, 從z軸起算, 相當$\frac{\pi}{2}$扣掉(北)緯度. (在北極是0而在南極是π)

$\int \frac{\cos\theta - a}{((\cos\theta-a)^2+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta d\theta$

$= -\int \frac{\cos\theta - a}{((\cos\theta-a)^2+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} d\cos\theta$

令$\cos\theta = z$,

-原式 $= \int \frac{z-a}{[(z-a)^2+1-z^2]^{\frac{3}{2}}} dz$

$= \int \frac{z-a}{(1+a^2-2az)^{\frac{3}{2}}} dz$

$= \int \frac{z-a}{[1-a^2-2a(z-a)]^{\frac{3}{2}}} dz$

令 $z - a = u$, $dz = du$

$\int \frac{udu}{(1-a^2-2au)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{1}{(2a)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{udu}{(\frac{1-a^2}{2a}-u)^{\frac{3}{2}}}$

令 $\frac{1-a^2}{2a} - u = v$

得 $\int \frac{v - \frac{1-a^2}{2a}}{v^{\frac{3}{2}}} dv$

(I) 如果 $a > 1$時, 表示質點在球的外部

$u = z - a < 0$, $z = -1 \to +1$, $u = -1 - a \to 1 - a$.

$v = \frac{1-a^2}{2a} - u = \frac{1-a^2}{2a} + a - z = \frac{1+a^2}{2a} - z > 0$.

$v = \frac{1+a^2}{2a} + 1 \to \frac{1+a^2}{2a} - 1$.

亦即 $v = \frac{(1+a)^2}{2a} \to \frac{(a-1)^2}{2a}$.

$\int \frac{v}{v^{\frac{3}{2}}} dv = \int \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}$

$= 2v^{\frac{1}{2}}\Big] = 2\left(\frac{1+a}{\sqrt{2a}} - \frac{a-1}{\sqrt{2a}}\right)$

$= \frac{4}{\sqrt{2a}} \cdots (1)$

$-\frac{1-a^2}{2a} \int \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} dv = \frac{1-a^2}{2a} \frac{2}{v^{\frac{1}{2}}}\Big]$

$= \frac{1-a^2}{a}\left(\frac{\sqrt{2a}}{1+a} - \frac{\sqrt{2a}}{a-1}\right)$

$= \frac{2\sqrt{2a}}{a} \cdots (2)$

(1)+(2)得 $\frac{8}{\sqrt{2a}}$, 再乘以$\frac{1}{(2a)^{\frac{3}{2}}}$ 得 $\frac{2}{a^2}$ 再乘上$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi$, 得$\frac{2}{a^2} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{a^2}$

相當質量"4π"集中在原點, 對$(0,0,a)$的重力.

(II) 如果$a<1$時, 在所有計算中, 牽涉到$\sqrt{(a-1)^2}$都要改為$1-a$
(1)式變成$2\left(\frac{1+a}{\sqrt{2a}}+\frac{a-1}{\sqrt{2a}}\right)=\frac{4a}{\sqrt{2a}}\cdots(3)$
(2)式變成$\frac{1-a^2}{a}\left(\frac{\sqrt{2a}}{1+a}+\frac{\sqrt{2a}}{a-1}\right)=-2\sqrt{2a}\cdots(4)$
(3)+(4)得0, 亦即在球內部所受的重力為0.