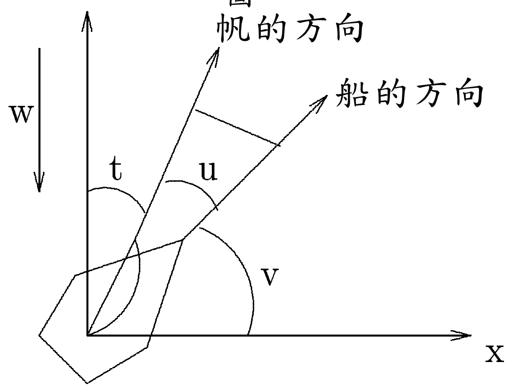
逆風而行的帆船

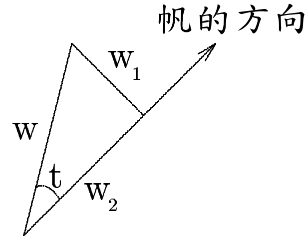
帆船前進的動力來自風力, 然而帆船卻也能逆風而行. 乍聽之下似乎不可思議, 但事實上只要將船身和船帆的角度調整得當便可達成. 不過船的前進方向並不是完全正逆著風.

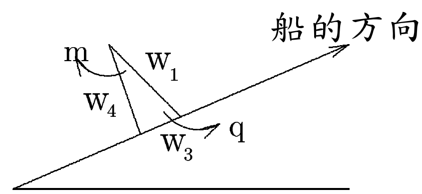
圖一



圖一為帆船的俯視圖, w代表風力, 由正北方往南吹, w可分為w_1, w_2兩個分量, w_1與帆的方向垂直, w_2與帆的方向平行, 如圖二所示, 實際對帆有影響的力為w_1,

圖二 圖三





所以船受到的力為w_1. w_1可分為w_3, w_4兩個分量, w_3與船的方向平行, w_4與船的方向垂直, 如圖三所示, 由於船的結構與水的阻力, w_4能使船橫移的程度有限, 在此忽略不計, 所以真正能使船前進的力為w_3, 而w_3有往北的分量, 此一分量越大, 船往北速度的分量就越大, 那麼究竟在t, u, v三個角的角度為何時, w_3往北的分量會最大呢?

解: 設w_3往北的分量為w_0, 由圖三可知$||w_0|| = ||w_3|| \cdot \sin v$. $||w_3|| = ||w_1|| \cdot \cos\theta = ||w_1|| \cdot \sin u$. 由圖二可知$||w_1|| = ||w|| \cdot \sin t$. $\therefore ||w_0|| = ||w|| \cdot \sin t \cdot \sin u \cdot \sin v$, $||w||$固定, t, u, v滿足$t + u + v = \frac{\pi}{2}$ 求$||w||$的最大值

為一條件極值的問題. 將t用u,v表示, $t=\frac{\pi}{2}-u-v$, $||w_0||=||w||\sin(\frac{\pi}{2}-u-v)\sin u\sin v=||w||\cos(u+v)\sin u\sin v$. 極值發生在$\frac{\partial||w_0||}{\partial u}=\frac{\partial||w_0||}{\partial v}=0$,

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-||w||\sin(u+v)\sin u\sin v+||w||\cos(u+v)\cos u\sin v&=&0\\-||w||\sin(u+v)\sin u\sin v+||w||\cos(u+v)\sin u\cos v&=&0\end{array}\right.$$

u,v,t在極大值發生時皆不為0, 否則$||w_0||=||w||\sin t\sin u\sin v=0$

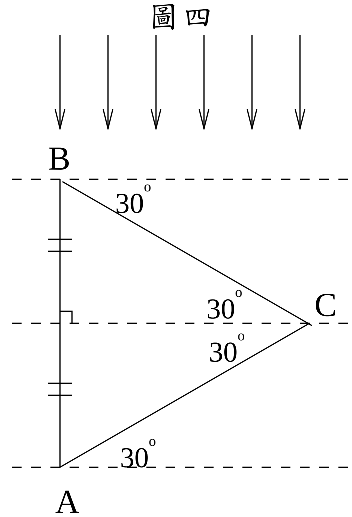
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\sin(u+v)\sin u&=&\cos(u+v)\cos u\cdots(1)\\\sin(u+v)\sin v&=&\cos(u+v)\cos v\end{array}\right.$$

$\Rightarrow\tan(u+v)=\cot u=\cot v$, $\therefore u=v$, 代入(1)式. $\sin 2u\sin u=\cos 2u\cos u\Rightarrow\tan 2u\tan u=1\Rightarrow\frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}\cdot\tan u=1\Rightarrow\tan^2 u=\frac{1}{3}\Rightarrow\tan u=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow u=30^\circ,v=30^\circ,\Rightarrow u=v=t=30^\circ$. 此時船受到往北的力最大.

本題也可用Lagrange multiplier的方法來做. 考慮$f(t,u,v)=||w||\sin t\sin u\sin v+\lambda(t+u+v-\frac{\pi}{2})$, λ為待定係數. $||w||\sin t\sin u\sin v$有極值時, $f_t=f_u=f_v=0$ $\Rightarrow||w||\cos t\sin u\sin v+\lambda=||w||\sin t\cos u\sin v+\lambda=||w||\sin t\sin u\cos v+\lambda$. 同減$\lambda$, 再同除$||w||\sin t\sin u\sin v\Rightarrow\cot t=\cot u=\cot v\Rightarrow t=u=v$, 又$t+u+v=90^\circ\Rightarrow t=u=v=30^\circ$.

在這樣的情形下，船受到往北的力量最大, 而船往東偏北30°前進, 而若將船頭朝向西偏北 30°, 船帆朝西偏北60°, 此時船受到往北的力量也是最大, 而船往西偏北30° 前進. 若欲由A地乘帆船到正北方的B地, 此時吹著正北風, 那該如何操帆掌舵才會最快呢?

圖四



如果要最快到達B地, 則船所受到往北的分力在任何時刻都必須是最大的, 則$t = u = v = 30^\circ$, 船頭往東偏北30°或是往西偏北30°, 最簡單的一個方法便是從A點往東偏北30° 出發, 到達AB中垂線上的C點, 再折往西偏北30°前進, 就可用最短的時間到達B了. (此為風向皆由正北朝正南吹的情形).