行星繞日的軌道

在萬有引力的作用下, 行星繞日的軌道是圓錐曲線, 如何理解?

假設行星的位置坐標寫成$X=(r\cos\theta, r\sin\theta)$, 速度$V=\frac{dX}{dt}$, 計算

$$V=(\dot{r}\cos\theta, \dot{r}\sin\theta)+(-r\sin(\theta)\dot{\theta}, r\cos(\theta)\dot{\theta})=V_r+V_\theta$$

其中V_r表徑向的速度, V_θ表垂直徑向的速度, V_r的大小是$\dot{r}$, V_θ的大小是$r\dot{\theta}$

角動量守恒表示$X\times V$是常數, 它的大小是$r\cdot(r\dot{\theta})=r^2\dot{\theta}=L=$常數, 令$A$表加速度向量$A=\frac{dV}{dt}$, 它指向太陽(原點), 大小與$r^2$成反比. 計算

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{dV}{dt}\frac{dt}{d\theta}=A\frac{1}{\dot{\theta}}=A\frac{r^2}{r^2\dot{\theta}}=A\frac{r^2}{L}$$

因此$\frac{dV}{d\theta}$的方向指向原點, 並且大小固定.
令$\frac{dV}{d\theta}=(a\cos\theta, a\sin\theta)$, a是常數. 因此$V=(a\sin\theta, -a\cos\theta)+(b,c)$; b,c是常數. V_r的大小 $=V\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=b\cos\theta+c\sin\theta=\frac{dr}{dt}$, 除以$r^2$

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r^2}(b\cos\theta+c\sin\theta)=\frac{\dot{\theta}}{r^2\dot{\theta}}(b\cos\theta+c\sin\theta)=\frac{\dot{\theta}}{L}(b\cos\theta+c\sin\theta)$$

所以 $\frac{d\frac{1}{r}}{dt}=(k\cos\theta+l\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$, k,l是常數, 亦即

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dt}=(k\cos\theta+l\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{k^2+l^2}\sin(\theta+\alpha)\frac{d\theta}{dt}$$

不妨設$\alpha=0$, 得$\frac{1}{r}=h\cos\theta+m$, h,m是常數

$$1=hx+m\sqrt{x^2+y^2}$$

或

$$1-hx=m\sqrt{x^2+y^2}$$

兩邊平方, $(x,y)=X$滿足錐線方程.

附註: 注意到V分佈在以(b,c)為心, 半徑為a的圓上, 這對軌道是圓錐曲線有什麼幾何直觀的提示呢?