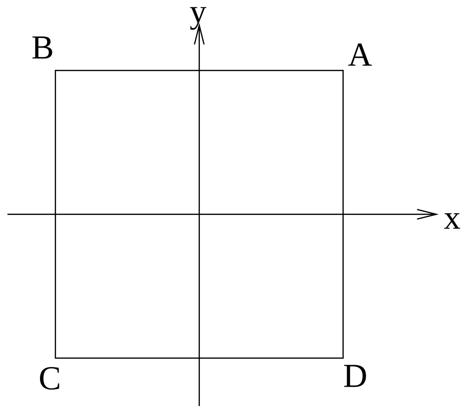
四隻蒼蠅飛行問題

有四隻蒼蠅A,B,C,D分別位於平面上的(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1, -1)如圖所示, 之後牠們一起以每秒1單位的速度行動, 行動的方式為



A蒼蠅一直向著B蒼蠅靠近, B蒼蠅一直向著C蒼蠅靠近, C蒼蠅一直向著D蒼蠅靠近, D蒼蠅一直向著A蒼蠅靠近, 那麼

(a) 四隻蒼蠅會在何處相遇?

(b) 牠們多久會相遇?

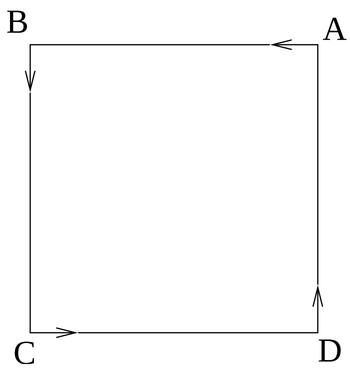
(c) 找出A蒼蠅的行動軌跡, 並大致畫出

(d) 計算A蒼蠅從開始到相遇的路徑長

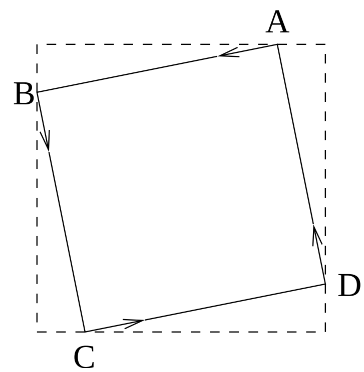
(e) 蒼蠅A會有什麼樣的生理反應?

(a)(b) 從物理相對運動的觀點來看A的行進方向始終和B的行進方向保持垂直, 你可以想像蒼蠅移動了瞬間之後, 方向就立即修正(參照圖一、二、三), 由於四隻蒼蠅是做等速運動, 所以每一時刻以四隻蒼蠅圍出來的四邊形會是正方形, (行進方向垂直加上等速)於是當時間愈久的時候, 蒼蠅愈來愈靠近, 正方形愈來愈小, 最後會內縮成一點, 這一點會是原點, 這就是他們相遇的地方. 此外, A靠近B是垂直方向靠近, 所以從B蒼蠅看來, A還是以1 單位/秒 的等速向B靠近, 原來A,B的距離是2單位, 因此需要 $\frac{2}{1}=2$秒的時間四隻蒼蠅會相遇 ($B\to C$, $C\to D$, $D\to A$的推論都一樣, ∴四隻會一起相遇)

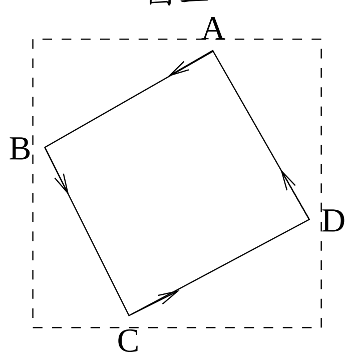
圖一



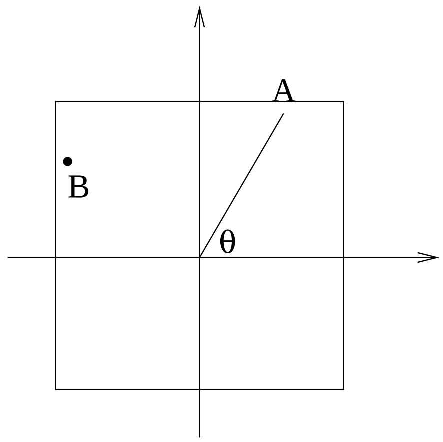
圖二



圖三



(c) 我們將蒼蠅A的坐標位置用<u>極坐標</u>的方式表達, $A:(r\cos\theta, r\sin\theta)$, 而B的位置就是$(r\cos(\theta+90^\circ), r\sin(\theta+90^\circ) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ 要注意的是: r和θ都是t的函數$(r(t),\theta(t))$



而A的速度是

$$\left(\frac{\dot r\cos\theta - r\sin\theta\dot\theta}{\sqrt{(\dot r)^2+(\dot\theta)^2}}, \frac{\dot r\sin\theta - r\cos\theta\dot\theta}{\sqrt{(\dot r)^2+(\dot\theta)^2}}\right)$$

此向量要與 $\overrightarrow{AB} = (-r(\sin\theta+\cos\theta), r(\cos\theta-\sin\theta))$平行, 於是(如果 $r\neq 0$)

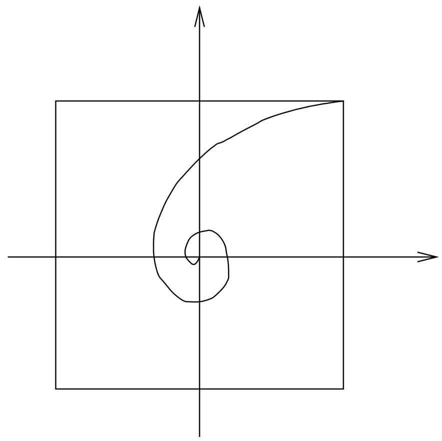
$\frac{\dot r\cos\theta - r\sin\theta\dot\theta}{-r(\sin\theta+\cos\theta)} = \frac{\dot r\sin\theta - r\cos\theta\dot\theta}{r(\cos\theta-\sin\theta)} \Rightarrow \frac{\dot r\cos\theta - r\sin\theta\dot\theta}{r(\sin\theta+\cos\theta)} + \frac{\dot r\sin\theta - r\cos\theta\dot\theta}{r(\cos\theta-\sin\theta)} = 0$

$\frac{\dot r r(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)+r^2(-\sin\theta\cos\theta\dot\theta+\sin^2\theta\dot\theta+\sin\theta\cos\theta\dot\theta+\cos^2\theta\dot\theta)}{r(\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta-\sin\theta)} = 0$

$$\Rightarrow \dot r + r\dot\theta = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dr}{r} = -d\theta \Rightarrow \ln r = -\theta + c$$

$\Rightarrow r = e^{-\theta}\cdot c$, 初始值 $\sqrt{2} = e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot c$, $\therefore c = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $\therefore \underline{r = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\theta}}$. $(\theta \geq \frac{\pi}{4})$

其軌跡如下圖所示



事實上我們必須注意到, 在$r \neq 0$的情形下才有$r = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\theta}$的推論, 我們不妨用積分式算出$t$時刻走了多少路徑: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = 1 \cdot t$ (等式右邊是速度乘上時間) $\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} 2e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\theta} d\theta = t \Rightarrow 2 - 2e^{\frac{\pi}{4}-\theta} = t$, 在$t = 2$的時候, $r = 0$. "$\theta = \infty$". 所以其實蒼蠅A的軌跡應為

$$\underline{r = \begin{cases} \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-\theta} & , \frac{\pi}{4} \leq \theta < \infty \quad , (t \in [0,2)) \\ 0 & , \theta = \infty \quad , (t = 2) \end{cases}}$$

上述討論要表達的是說, 加上$(r,\theta) = (0,\infty)$這一點是需要的, 並且加上那一點後, <u>軌跡還是連續的</u>(可以想一下如何定義在<u>端點的連續性</u>)

(d) 由(c) $\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} 2e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\theta} d\theta = 2e^{\frac{\pi}{4}}(-e^{-\theta})|_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} = 2$

(e) 由(c)得知在t到2的時候, $\theta = \infty$, 換言之, 在之前已<u>轉了無限多圈</u>. 於是<u>蒼蠅會"頭昏"</u>